箱根セミナ記録 9 2 (1992) 1-23.

1993.2.22

D S — S Y S T E M

神戸大学 理学部 池田裕司
東洋大学 工学部 山下正勝
上智大学 理工学部 横山和夫

これまでずっと DS-diagramを絵で示してきましたが，これらを絵に頼らずに記述する方法はないものか，と休むに似たる下手な考えを続けてきました。最近になってようやくひとつの方法が得られたような気がするので諸賢兄のご批判を仰ぎたく，ノートとしてまとめてみました。読みづらいことは承知のうえで，あえて形式的記述を採用してみましたが，なにしろまだ未完成なのでいいかげんなところも多く，そこらあたりは適当な表現に頼らざるをえませんでした。今回の内容は fake surface の表現法から一歩も出ていませんので，新しい事柄は何もありません。

§1 は多角形表示を持ち得る 2-complex についての基礎的な話です。

§2 は collapsing map の inverseでひきもどした様子を記述するための準備です。

§3 は free faceを持たない spineに限定した場合でのいくつかの基礎的性質を記述したものです。

§4 は将来 universal cover 風の記述を画策するための準備です。この部分はもうすこし話題を追加するつもりです。

§5 に至ってやっと fake surfaceの記述が可能になります。
DS-diagramの名前の由来を知らないので，だじゃれでこじつけてみるために， fake surfaceというべきところをあえて standard polyhedronと言ってみました。

§6 は「 DS-diagramが多角形表示可能である」ことを示す内容にするのを目標にしたもので，これこそがこのノートの最終目標でしたが，はたしてもくろみどおりにうまくいっているのやらいないのやら，どうもいまひとつ自信がありません。

§1. POLYGONAL SYSTEM

1.1 <u>Definition.</u> 集合Sに対し，

$$S^{\pm 1} = S \times \{+1,\ -1\},$$
$$S^{\pm} = S \times \{+,\ -\}$$

と定める。$S^{\pm 1}$ の元 $(A,\ +1)$, $(A,\ -1)$ を，A^{+1}, A^{-1} と書く。また，$S^{\pm 1}$ の元 $(A,\ +)$, $(A,\ -)$ を A^{+}, A^{-} と書く。

$$(S^{\pm 1})^{n} = S^{\pm 1} \times S^{\pm 1} \times \cdots \times S^{\pm 1} \quad (\text{n times})$$

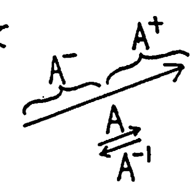
の元 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を長さnの <u>word</u> と呼び，$X_1X_2\cdots X_n$ と書く。

$A^{-1} \in S^{\pm 1}$ に対して，

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

と定める。また，word $W = X_1X_2\cdots X_n$ に対して

$$W^{-1} = X_n^{-1}\cdots X_2^{-1}X_1^{-1}$$



と定める。

A^{+}, $A^{-} \in S^{\pm}$ に対して，

$$(A^{+})^{+} = A^{+} \qquad (A^{+})^{-} = A^{-}$$
$$(A^{-})^{+} = A^{-} \qquad (A^{-})^{-} = A^{+}$$

と定める。

A^{+1}, $A^{-1} \in S^{\pm 1}$ に対して，

$$(A^{+1})^{+} = A^{+} \qquad (A^{+1})^{-} = A^{-}$$
$$(A^{-1})^{+} = A^{-} \qquad (A^{-1})^{-} = A^{+}$$

と定める。

$A^{+1} \in S^{\pm 1}$ と $A \in S$ を混同して，同じ記号 A で表わすことがある。また，$X \in S^{\pm 1}$ と $(X^{-},\ X^{+}) \in S^{\pm} \times S^{\pm 1}$ を同一視する。

射影 $P_i : (S^{\pm 1})^{n} \to S^{\pm 1}$, $q : S^{\pm 1} \to S$ をそれぞれ

$$P_i(W) = X_i \quad \text{for each} \quad W = X_1X_2\cdots X_n \in (S^{\pm 1})^{n}$$
$$q(X) = A \quad \text{if} \quad X = A^{\varepsilon},\ \varepsilon = \pm 1$$

で定める。

$W = X_1X_2\cdots X_n \in (S^{\pm 1})^{n}$ のとき，$q(P_i(W)) = A$ であるならば X_i は W における A の <u>ghost</u> である，という。

1.2 <u>Proposition.</u>

(1) $\forall\ X \in S^{\pm 1}$; $X^{+},\ X^{-} \in S^{\pm}$,

(2) $\forall\ A \in S$; $A = (A^{-},\ A^{+}),\quad A^{-1} = (A^{+},\ A^{-})$.

1.3 <u>Definition.</u> 長さ k の words の集合 P^{k} , $k = 1, 2, 3, \cdots$,
を以下のように定める：

$k = 1$ のとき，$P^{1} = \{X \mid X \in S^{\pm 1}\}$,

$k \geqq 2$ のとき，

$Q \in P^{k} \Leftrightarrow$ (ⅰ) $Q = X_1 X_2 \cdots X_k,\ X_i \in S^{\pm 1}$,

(ⅱ) $X_{i+1} \neq X_i^{-1}$ for each i (mod. k),

(ⅲ) $X_i X_{i+1} \neq X_j X_{j+1},\ X_{j+1}^{-1} X_j^{-1}$

for each $i \neq j$ (mod. k).

$P = P^{1} \cup P^{2} \cup \cdots \cup P^{k} \cdots$ を <u>polygonal set</u> という。

1.4 <u>Example.</u> polygonal set の元になり得ない words の例：

$AA^{-1},\ ABA^{-1},\ ABCA^{-1},\ \cdots,\ ABCABD,\ ABCB^{-1}A^{-1}D,\ BCB\text{-}1A^{-1}DA, \cdots$

1.5 <u>Proposition.</u>

(1) $Q \in P^{k} \Rightarrow Q^{-1} \in P^{k}$,

(2) $Q = XW,\ X \in S^{\pm 1},\ Q \in P^{k} \Rightarrow WX \in P^{k}$.

1.6 <u>Definition.</u> $Q, Q', Q'' \in P = P^{1} \cup P^{2} \cup \cdots \cup P^{k} \cdots$ に対して

(ⅰ) $Q^{-1} \equiv Q$,

(ⅱ) $Q = XW,\ X \in S^{\pm 1} \Rightarrow XW \equiv WX$,

(ⅲ) $Q \equiv Q' \Rightarrow Q' \equiv Q$,

(ⅳ) $Q \equiv Q',\ Q' \equiv Q'' \Rightarrow Q \equiv Q''$,

と定めることによってPに同値関係 '≡' を入れる。$Q \in P^{k}$ の ≡ に関する同値類 $\alpha = [Q]$ を k-<u>gon</u> という。Q 自身をも，混同して k-<u>gon</u> と呼ぶことにする。

以下 k-gons の集合：

$$\Sigma = \{ Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_m \mid Q_i \in P \}$$

について考える。

1.7 <u>Definition.</u> Σ に対して，

$S_\Sigma = \{ A \in S \mid A$ の ghost を含む word が Σ 内にある$\}$

$S_\Sigma^{\pm 1} = S_\Sigma \times \{+1, -1\}$

とあらわす。

1.8 <u>Definition.</u> $i = 1, 2, \cdots, m$, とし，

$\Sigma = \{ Q_i \mid Q_i \in P \} = \{ Q_i = X_{i1} X_{i2} \cdots X_{i, k(i)} \mid X_{ij} \in S^{\pm} \}$

$\Sigma' = \{ Q'_i \mid Q'_i \in P \}$,

とする。そのとき

bijection $f : S_\Sigma^{\pm 1} \to S_{\Sigma'}^{\pm 1}$, such that

(i) $f(X^{-1}) = (f(X))^{-1}$ for each $X \in S_\Sigma^{\pm 1}$,

(ii) $\Sigma' \equiv \{ f(X_{i1}) f(X_{i2}) \cdots f(X_{i, k(i)}) \}$,

が存在するならば，Σ と Σ' は <u>isomorphic</u> であるといい，

$\Sigma \cong \Sigma'$ と書く。

1.9 <u>Definition.</u> k-gon Q の corner を次のように定める：

1-gon $Q = X \in P^1$ に対して，集合 $\Lambda = \{ X^+,\ X^- \}$ を Q の <u>corner</u> という。

k-gon $Q = X_1 X_2 \cdots X_k \in P^k$ ($k \geqq 2$) に対して，集合：

$$\Lambda = \{ X_i^+,\ X_{i+1}^- \},\quad i = 1, 2, \cdots, k,\ (\mathrm{mod},\ k),$$

を Q の <u>corner</u> という。

$Q \in P^k$ の corners の全体を $\lambda(Q)$ と書く。

1.10 <u>Proposition.</u>

(1) $Q \in P^k \Rightarrow \# \lambda(Q) = k$,

(2) $Q,\ Q' \in P^k,\ Q \equiv Q' \Rightarrow \lambda(Q) = \lambda(Q')$.

1.11 <u>Definition.</u> $\Sigma=\{Q_i \mid Q_i\in P,\ i=1,2,\cdots,m\}$ が

$$\lambda(Q_i)\cap\lambda(Q_j)=\phi \quad \text{if } i\neq j$$

をみたすとき，Σ を <u>polygonal system</u> という。このとき

$$\lambda(\Sigma)=\lambda(Q_1)\cup\lambda(Q_2)\cup\cdots\cup\lambda(Q_m)$$

と書き，その元を Σ の <u>corner</u> という。

1.12 <u>Definition.</u> polygonal system Σ に対して，$S_\Sigma^{\pm}$ に同値関係 '$\sim$' を次のように入れる。ただし，$A\in S_\Sigma$ に対して A^ε は A^+ または A^- のどちらかを表わすものとする：

(i) $\{A^\varepsilon, B^{\varepsilon'}\}\in\lambda(\Sigma) \Rightarrow A^\varepsilon\sim B^{\varepsilon'}$,

(ii) $A^\varepsilon\sim B^{\varepsilon'}$, $B^{\varepsilon'}\sim C^{\varepsilon''} \Rightarrow A^\varepsilon\sim C^{\varepsilon''}$.

$S_\Sigma^{\pm}/\sim$ の元を Σ の <u>vertex</u> という。Σ の vertices の全体を V_Σ と書く。各 $v\in V_\Sigma$ に one point $|v|$ を対応させ，これを v の <u>underlying space</u> という。

1.13 <u>Definition.</u> polygonal system $\Sigma=\{Q_i\}$ に対して，$\alpha_i=[Q_i]$ を Σ の <u>face</u>，S_Σ の元を Σ の <u>edge</u> という。Σ の faces の全体，edges の全体をそれぞれ F_Σ, E_Σ と書く。各 $\alpha\in F_\Sigma$, $A\in E_\Sigma$ に対してそれぞれ open 2-disk $|\alpha|$, open interval $|A|$ を対応させ，これらをそれぞれ α, A の <u>underlying space</u> という。

1.14 <u>Definition.</u>

A^ε が $v\in V_\Sigma$ の代表であるとき，$v<A$ と書き，v は $A\in E_\Sigma$ と <u>incident</u> である，という。

$A\in S_\Sigma$ が $Q\in\alpha$ の ghost であるとき $A<\alpha$ と書き，$A\in E_\Sigma$ は $\alpha\in F_\Sigma$ と <u>incident</u> である，という。

$v\in V_\Sigma$ と $\alpha\in F_\Sigma$ に対し，$v<A$，$A<\alpha$ となる $A\in E_\Sigma$ が存在するとき $v<\alpha$ と書き，v と α は <u>incident</u> である，という。

1.15 <u>Definition.</u> polygonal system Σに対して $V_\Sigma \cup E_\Sigma \cup F_\Sigma$ が作る２次元 cell complexを <u>spine complex</u>と呼び，$K(\Sigma)$とあらわす。

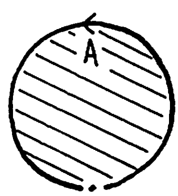
各 cellの underlying space の和集合を $|K(\Sigma)|$ と書き，$K(\Sigma)$ の <u>underlying space</u> という。

1.16 <u>Proposition.</u> $\Sigma \equiv \Sigma'$ ならば次のことがなりたつ：

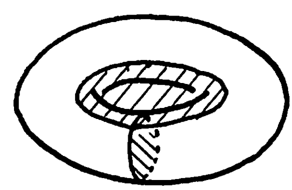
$$F_\Sigma = F_{\Sigma'},\ E_\Sigma = E_{\Sigma'},\ V_\Sigma = V_{\Sigma'}$$
$$\lambda(\Sigma) = \lambda(\Sigma').$$

1.17 <u>Example.</u> spine complexの例をいくつか挙げる：

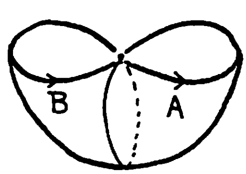
$\{A\}$



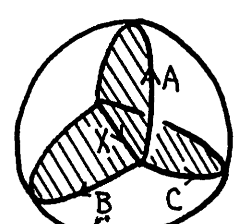
$\{A,\ B.\ ABA^{-1}B^{-1}\}$



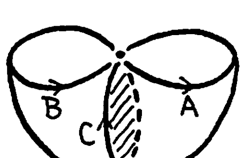
$\{AB\}$



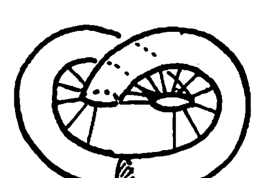
$\{AB^{-1},\ BC^{-1},\ CA^{-1}, AX,\ BX,\ CX\}$



$\{AC,\ BC^{-1}\}$



$\{A,\ AB^{-1}ABB\}$



§ 2. MEMBRANE COMPLEX OF POLYGONAL SYSTEM.

この節では，δは＋または－を表わすものとする。すなわち $A \in S_\Sigma$ に対しては A^δ とは A^+ または A^- のことである。

2.1 Definition. $S_\Sigma^\pm$ の３つの元からなる集合：

$$\{A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}\}$$

が polygonal system Σの junction であるとは

$$\{A_i^{\delta_i}, A_j^{\delta_j}\} \in \lambda(\Sigma) \quad \text{for each} \quad i \neq j$$

となることである。Σの junctions の全体を $\eta(\Sigma)$ と書く。

$\beta = \langle A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2} | A_3^{\delta_3} \rangle$ がΣの brimであるとは$Y = \{A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}\}$ がΣの junctionであることである。

2.2 Proposition.

$\{A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}\} \in \eta(\Sigma)$, $v \in V_\Sigma$; $v < A_1^{\delta_1}$

$\Rightarrow$

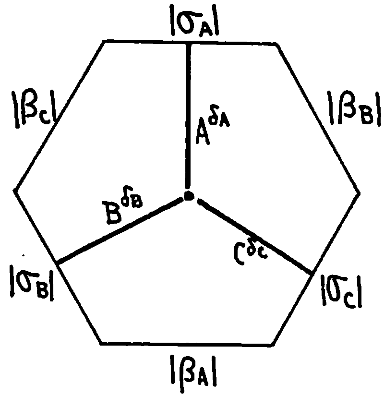
$v < A_2^{\delta_2}$, $v < A_3^{\delta_3}$

2.4 Definition. $Y = \{A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}\}$ がΣの junctionであるとき，$\sigma = [A_1^{\delta_1} | A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}]$ をYの sectional edgeという。このとき pair (Y, σ) を directed junctionという。

2.5 Definition.

junction $Y = \{A^{\delta_A}, B^{\delta_B}, C^{\delta_C}\} \in \eta(\Sigma)$ に対して，その情報を次図のように配置したものを Y の substance という。また六角形状の 2-diskをYの underlying space といい，$|Y|$ と表わす。segment $|\sigma_A|$ を sectional edge σ_A の underlying space，segment $|\beta_A|$ を brim β_A の underlying space，などという。

(8)



$$\sigma_A = [A^{\delta_A} | B^{\delta_B}, C^{\delta_C}]$$
$$\sigma_B = [B^{\delta_B} | C^{\delta_C}, A^{\delta_A}]$$
$$\sigma_C = [C^{\delta_C} | A^{\delta_A}, B^{\delta_B}]$$

$$\beta_A = \langle B^{\delta_B}, C^{\delta_C} | A^{\delta_A} \rangle$$
$$\beta_B = \langle C^{\delta_C}, A^{\delta_A} | B^{\delta_B} \rangle$$
$$\beta_C = \langle A^{\delta_A}, B^{\delta_B} | C^{\delta_C} \rangle$$

2.6 <u>Definition.</u> polygonal system Σの brimsの underlying space の全体 $|\beta_A|$ を $\beta(\Sigma)$ と表わす。

$Y \in \eta(\Sigma)$, $\beta \in \beta(\Sigma)$, $|\beta| \subset |Y|$ であるとき $\beta < Y$ と表わす。

2.7 <u>Definition.</u> m-gon $Q = X_1 X_2 \cdots X_m$ に対して，$S_Q{}^{\pm}$ の元の巡回無限列：

$$T(Q) = \cdots X_m{}^{+} \cdot X_1{}^{-} X_1{}^{+} X_2{}^{-} X_2{}^{+} \cdots X_m{}^{-} X_m{}^{+} \cdot X_1{}^{-} \cdots$$

を Q から induce された周長mの <u>track</u> という。T(Q) の連続した部分列をT(Q) の <u>fragment</u> という。

2.8 <u>Definition.</u> ２つの brims β_Aとβ_Bが，或る fragment :

$$A_1{}^{\delta_1} A_2{}^{\delta_2} B_1{}^{\delta'_1} B_2{}^{\delta'_2},$$

の因子を用いて

$$\beta_A = \langle A_1{}^{\delta_1}, A_2{}^{\delta_2} | A_3{}^{\delta_3} \rangle, \quad \beta_B = \langle B_1^{\delta'_1}, B_2^{\delta'_2} | B_3^{\delta'_3} \rangle$$

と表わされるならば，これらは <u>adjacent</u>である，という。

adjacentな brims β_A と β_B に対し，$\nu = |\beta_A, \beta_B|$を，Σの <u>joint point</u>という。このとき $\nu < \beta_A, \beta_B$ と表わす。

また，β_A, β_B から induce される sectional edges :

$$\sigma_A = [A_2{}^{\delta_2} | A_1{}^{\delta_1}, A_3{}^{\delta_3}], \quad \sigma_B = [B_1{}^{\delta'_1} | B_2{}^{\delta'_2}, B_3{}^{\delta'_3}\rangle$$

に対して $\nu \subset |\sigma_A|$, $|\sigma_B|$ と表わす。

Σの joint pointsの全体を $\nu(\Sigma)$ と表わす。

2.9 <u>Definition.</u>　２つの sectional edges :

$\sigma_A = [A_1^{\delta_1} \mid A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}]$, $\sigma_B = [B_1^{\delta'_1} \mid B_2^{\delta'_2}, B_3^{\delta'_3}]$

がつぎの相互関係：

(i) $(A_1^{\delta_1})^+ = (B_1^{\delta'_1})^-$,

(ii) $A_2^{\delta_2}A_1^{\delta_1}B_1^{\delta'_1}B_2^{\delta'_2}$, $A_3^{\delta_3}A_1^{\delta_1}B_1^{\delta'_1}B_3^{\delta'_3}$ は fragment,

にあるとき，σ_A と σ_B は <u>attachable</u>であるという。

σ_A と σ_B が attachableであるとき， directed junctions (Y_A, σ_A) と (Y_B, σ_B) は <u>adjacent</u>であるという。

2.10 <u>Definition.</u>　sectional edges の全体 $\{\sigma_i\}$ を

(i) $\sigma \sim \sigma$

(ii) $\sigma_1 \sim \sigma_2$ if σ_1 is attachable with σ_2

という同値関係で同値類に分ける。そのときの同値類 $\gamma = [\sigma]$ をΣの <u>section</u>という，$|\sigma|$ をγの <u>underlying space</u>といい，$|\gamma|$ と表わす。

Σの sectionsの全体を$\gamma(\Sigma)$と表わす。

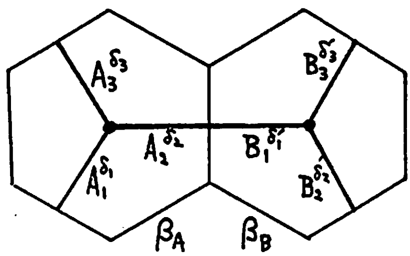
(Y, σ) が directed junction，かつ $\gamma = [\sigma]$ であるとき $\gamma < Y$とあらわす。

joint point $\nu \in \nu(\Sigma)$ と section $\gamma = [\sigma]$ に対して

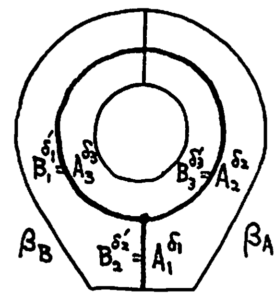
$$\nu < \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \nu \subset |\sigma|$$

と定める。

［注意］ $\sigma_A \sim \sigma_B$のとき，(Y_A, σ_A) と (Y_B, σ_B) に対して identification space $|Y_A| \cup |Y_B| / \sim$ を作ることができる。これらは一般には再び 2-diskとなるが，特殊な場合として，annulusになることがある。そのわけは，Y_A が self-adjacent ということが起こり得るからである。



general case



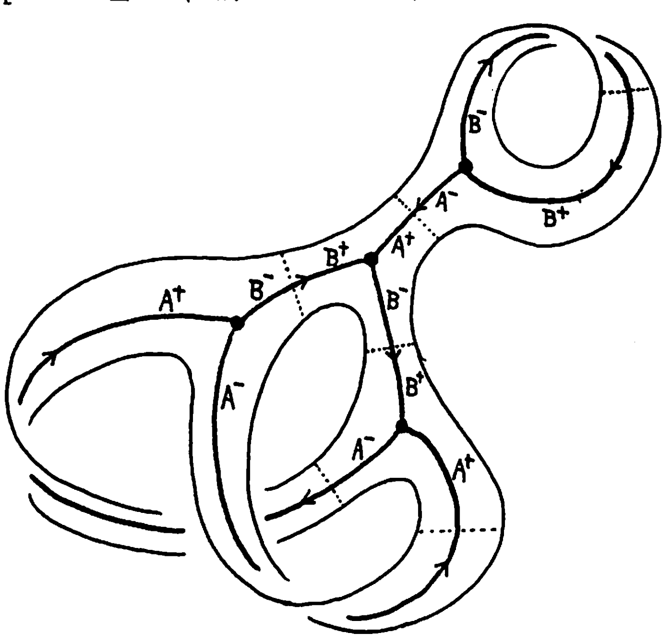
special case

2.11 <u>Definition.</u> Σを polygonal system とする。そのとき joint points $\nu(\Sigma)$ を 0-cells, $\beta(\Sigma)\cup\gamma(\Sigma)$ を 1-cells, junctions の全体 $\eta(\Sigma)$ を 2-cellsとする cell complexが得られる。この complexをΣの <u>membrane complex</u>と呼び,

$$M(\Sigma) = \nu(\Sigma) \cup \beta(\Sigma) \cup \gamma(\Sigma) \cup \eta(\Sigma)$$

と表わす。

2.12 Example $\Sigma = \{A,\ ABA^{-1}BB\}$



membrane complex $M(\Sigma)$ に対して将来 orientationを導入する必要があるかも知れない。そのときはつぎのようにしてやればよい。

2.13 Definition. junction $Y=\{A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}\}$ にこの順で1つの orientation を定めたとき，それを

$$(A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3})$$

と書くことにする。$\rho=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ i & j & k\end{pmatrix}$ を1つの置換とする。そのとき

$$(A_i^{\delta_i}, A_j^{\delta_j}, A_k^{\delta_k}) = \begin{cases} +(A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}) & \text{if } \rho \text{ is even}\\ -(A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}) & \text{if } \rho \text{ is odd}\end{cases}$$

と定める。

$$[A_1^{\delta_1} | A_3^{\delta_3}, A_2^{\delta_2}] = -[A_1^{\delta_1} | A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}]$$

$$\langle A_1^{\delta_1}, A_3^{\delta_3} | A_2^{\delta_2}\rangle = -\langle A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2} | A_3^{\delta_3}\rangle$$

と定めることにより各 sectionおよび各 brim に orientation を入れることができる。

$$[A_1^{\delta_1} | A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}] = -\langle A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2} | A_3^{\delta_3}\rangle$$

の orientation をoriented junction $Y=(A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3})$ の orientation と一致するように定めるとき，これをYからの induced orientation という。

§ 3. REGULAR SYSTEM.

3.1 <u>Definition.</u>　polygonal system Σ が

(R-1) $\forall A \in S_\Sigma$, $\exists Y \in \eta(\Sigma)$; $A^- \in Y$,

(R-2) $\{A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}\}, \{A_1^{\delta_1}, A_3^{\delta_3}\} \in \lambda(\Sigma) \Rightarrow \{A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}\} \in \lambda(\Sigma)$

を満たすとき，Σ は <u>regular</u> である，という。

3.2 <u>Example.</u>　$\Sigma_1 = \{A\}$ は (R-2) を満たす(？)が (R-1)を満たさない polygonal systemである。

$\Sigma_2 = \{A, B, C, ABC^{-1}BCA^{-1}CAB^{-1}\}$ は (R-1) を満たすが (R-2) を満たさない polygonal systemである。（ナぁーンデか？）

3.3 <u>Proposition.</u>　Σ が regular ならば

(R-1') $\forall A \in S_\Sigma$, $\exists Y' \in \eta(\Sigma)$; $A^+ \in Y'$

が成り立つ。

［証明］(R-1)の $Y \in \eta(\Sigma)$ を $Y = \{A^-, B^\varepsilon, C^{\varepsilon'}\}$ とする。$(X_B)^+ = B^\varepsilon$, $(X_C)^+ = C^{\varepsilon'}$ とするとき，$X_BAX_1\cdots$, $X_CAX_2\cdots \in P$ から自然に定まる corners $\{A^+, X_1^-\}$, $\{A^+, X_2^-\}$ が存在する。（いまは暗黙のうちに $X_BAX_1\cdots$, $X_CAX_2\cdots \in P^3 \cup P^4 \cup \cdots$ としたが，これらが P^1, P^2 の元であったとしても必要な corners は存在するので心配ない。）そのとき (R-2)により，$\{X_1^-, X_2^-\} \in \lambda(\Sigma)$ となるから $A^+ \in \{A^+, X_1^-, X_2^-\} \in \eta(\Sigma)$。

3.4 <u>Proposition.</u>　polygonal system Σ が regular ならば任意の directed junction (Y_A, σ_A) に対して，

$$\sigma_B \in [\sigma_A], \quad (Y_B, \sigma_B) \neq (Y_A, \sigma_A)$$

なる directed junction (Y_B, σ_B) が一意に存在する。

［証明］ $Y_A = \{A_1^{\delta_1},\ A_2^{\delta_2},\ A_3^{\delta_3}\}$, $\sigma_A = [A_1^{\delta_1} \mid A_2^{\delta_2},\ A_3^{\delta_3}]$,
とする。この Y_A の substance を考えると分かりやすい。

$$\Lambda_2 = \{A_1^{\delta_1},\ A_2^{\delta_2}\},\ \Lambda_3 = \{A_1^{\delta_1},\ A_3^{\delta_3}\}$$

を corner に持つ polygon は一意に定まる。それらを

$$Q_1 = A_1^{\delta_1} A_2^{\delta_2} \cdots,\ Q_2 = A_1^{\delta_1} A_3^{\delta_3} \cdots \in E_\Sigma$$

とする。そのとき track $T(Q_1)$, $T(Q_2)$ の fragments：

$$A_2^{\delta_2} A_1^{\delta_1} A_1^{\delta_1 -} B_2^{\delta'_2},\qquad A_3^{\delta_3} A_1^{\delta_1} A_1^{\delta_1 -} B_3^{\delta'_3}$$

が一意に存在する。したがって

$Y_B = \{A_1^{\delta_1 -},\ B_2^{\delta'_2},\ B_3^{\delta'_3}\}$, $\sigma_B = [A_1^{\delta_1 -} \mid B_2^{\delta'_2},\ B_3^{\delta'_3}]$

が望みのものである。（証明終わり）

3.5 <u>Definition.</u> Σ の brims：

$\beta_i = \langle B_i^{\delta_{Bi}},\ C_i^{\delta_{Ci}} \mid A_i^{\delta_{Ai}} \rangle$, $i = \cdots, -3, -1, -2, 0, 1, 2, 3, \cdots$,
に対して，

$$\cdots\cdots B_i^{\delta_{Bi}} \cdot C_i^{\delta_{Ci}} \cdot B_{i+1}^{\delta_{B,i+1}} C_{i+1}^{\delta_{C,i+1}} \cdots\cdots$$

が周長 m の track であるとき，これらの brims の無限列：

$$\tau = \cdots\cdots \beta_{-3} \beta_{-2} \beta_{-1} \beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \cdots\cdots$$

を Σ の，長さ m の <u>train</u> という，

$$\cdots \cup |\beta_{-3}| \cup |\beta_{-2}| \cup |\beta_{-1}| \cup |\beta_0| \cup |\beta_1| \cup |\beta_2| \cup |\beta_3| \cup \cdots$$

を $|\tau|$ とあらわし，τ の <u>underlying space</u> という。

Σ の trains の全体を $\tau(\Sigma)$ と表わす。

3.6 <u>Proposition.</u> $\tau = \cdots\beta_{-3}\beta_{-2}\beta_{-1}\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\cdots$, を長さmの trainとする。ただし,

$$\beta_i = \langle B_i{}^{\delta_{Bi}},\ C_i{}^{\delta_{Ci}} \mid A_i{}^{\delta_{Ai}}\rangle.$$

そのとき

(i) $|\tau|$ は circleである。

(ii) $\{B_i{}^{\delta_{Bi}},\ C_i{}^{\delta_{Ci}}\} = \{B_j{}^{\delta_{Bj}},\ C_j{}^{\delta_{Cj}}\}$ as a corner if $i=j$ (mod. m),

(iii) $\beta_{i+2m} = \beta_i$ for each i ,

(iv) $\beta_{i+m} = \beta_i$ for each i if $\beta_{k+m} = \beta_k$ for some k.

[証明] 要るでしょうねえ。

3.7 <u>Definition.</u> 長さmの train :

$$\tau = \cdots\cdots\beta_{-3}\beta_{-2}\beta_{-1}\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\cdots$$

は $\beta_{i+m} = \beta_i$ ならば<u>第1種</u>, $\beta_{i+m} \neq \beta_i$ ならば<u>第2種</u>であるという。

3.8 <u>Proposition.</u> polygonal system Σが regular ならば Σの任意の brim $\beta = \langle B^{\delta_B},\ C^{\delta_C} \mid A^{\delta_A}\rangle$ に対して$\beta_0 = \beta$なる train $\tau = \cdots\cdots\beta_{-3}\beta_{-2}\beta_{-1}\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\cdots$ が(方向を無視して)一意に存在する。

証明は Proposition3.3 を繰り返し用いれば自然に得られる。

3.9 <u>Proposition.</u> polygonal system Σが regular ならば Σの membrane complex $M(\Sigma)$ の underlying space $|M(\Sigma)|$ は circles $|\tau|$ を境界の連結成分とする曲面である。

[証明] 要るでしょうか?

§ 4. DEVELOPABLE SYSTEM

4.1 Definition. regular polygonal system Σが

(D-1) 任意の２つの junctions $Y, Y' \in \eta(\Sigma)$に対して junctions の列：

$$Y=Y_1, Y_2, \cdots, Y_p=Y', Y_i \in \eta(\Sigma)$$

such that

Y_iとY_{i+1}とは adjacent for each i $(1 \leqq i \leqq p-1)$,

が存在する,

(D-2) Σが第２種の train を含まない,

を満たしているとき，Σは developable である，という。

4.2 Example.

$\Sigma_1 = \{AB^{-1}, BC^{-1}, CA^{-1}, AD, BD, CD\}$.

$\Sigma_2 = \{A, B, ABA^{-1}B^{-1}\}$.

Σ_1, Σ_2 は regularであるが，これらは (D-1) を満たさない。

4.3 Proposition. polygonal systemΣが (D-1) を満たすならば，Σの membrane complex $M(\Sigma)$ は connectedである。

4.4 Example. $\Sigma = \{A, ABA^{-1}BB\}$ は (D-1) をみたす regular systemだが (D-2) を満たさない。（2.12 Ex.を参照せよ！）

4.5 Definition. 平面 $\mathbf{R}^2$で考える.

$V_0 = \{0\}$

$V_1 = \{e^{\theta i} \mid \theta = 2k\pi/3,\ k=0,1,2\ (\mathrm{mod}.3)\}$

$E_1 = \{0*y \mid y \in V_1\}$

$V_2 = \{2e^{\theta i} \mid e^{\eta i} \in V_1,\ \theta = \eta \pm (2\pi/3\cdot 2^2)\}$

※ 具体的には $\theta = \pi/6, 3\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 9\pi/6, 11\pi/6$.

$E_2 = \{x*y \mid x=e^{\eta i} \in V_1,\ y=2e^{\theta i},\ \theta=\eta \pm (\pi/6)\}$

$$V_n = \{ n e^{\theta i} \mid (n-1) e^{\eta i} \in V_{n-1},\ \theta = \eta \pm (2\pi/3 \cdot 2^n) \}$$

$$E_n = \{ x * y \mid x = (n-1) e^{\eta i} \in V_{n-1},\ y = n e^{\theta i},\ \theta = \eta \pm (2\pi/3 \cdot 2^n) \}$$

$$V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \cdots\cdots \cup V_n \cup \cdots\cdots$$

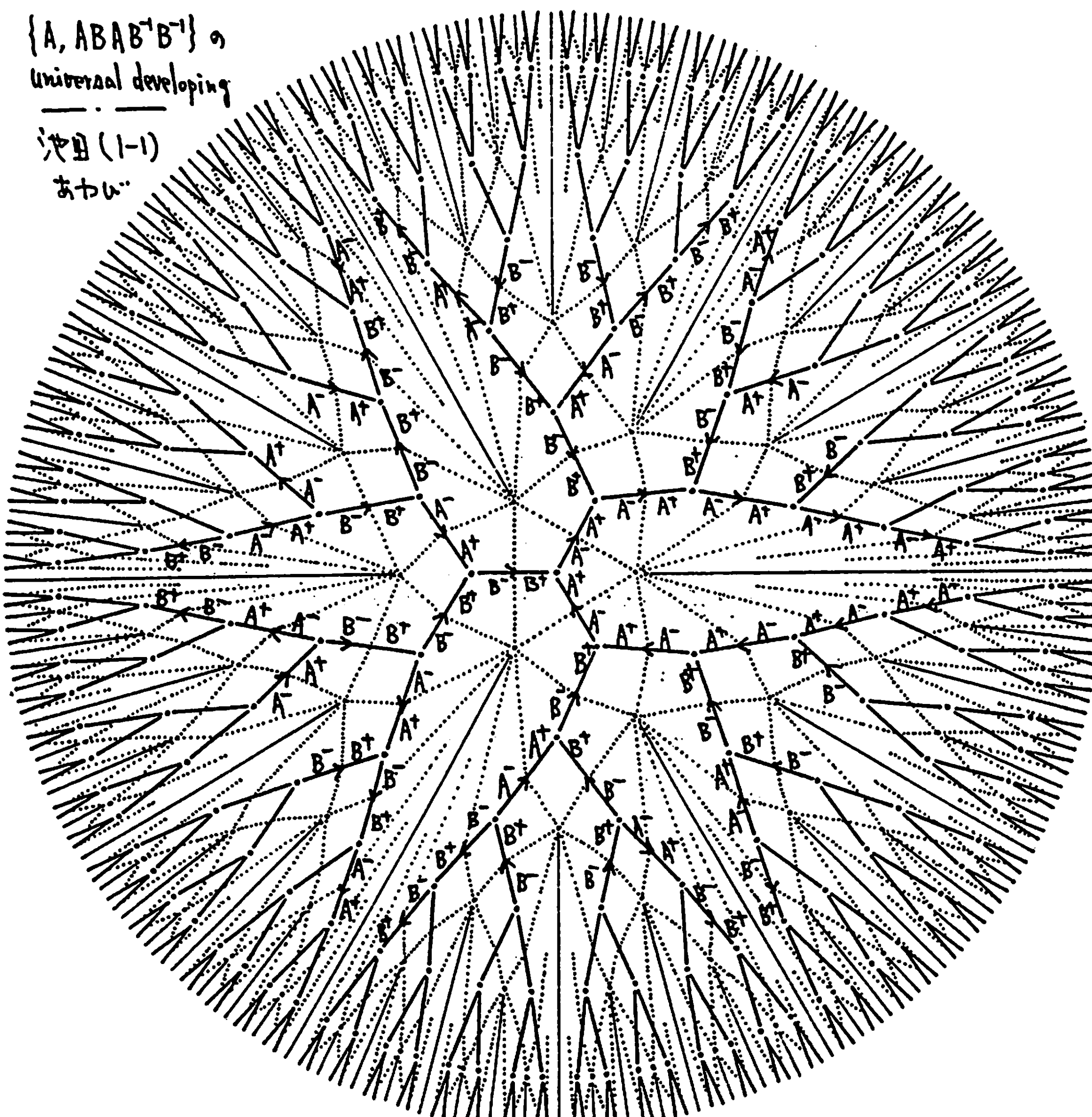
$$E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots\cdots \cup E_n \cup \cdots\cdots$$

$$T = (V * E)$$

このようにして，平面上に標準的な 3-regular tree$\mathbb{T}$が得られる。これをさらに図のように細分（？）したものをUとあらわす。

{A, ABAB^{-1}B^{-1}} の universal developing

池田(1-1) あわび



4.6 Proposition. Σが developable system であるならば，しかるべき自然な方法で

Uが p : U → M(Σ) を universal covering map として

Int M(Σ) 上の universal covering space となる，

ように combinatorial map p を構成することができる。ただし，Int M(Σ) はM(Σ) から境界部分を形成している brims 全体を取り除いて得られる open complex のことである。

4.7 Definition. 上のp : U → M(Σ) をΣの universal developingという。

4.8 Proposition. Uの combinatorial structure を保存する自己同型の全体は自由群$Z_2 * Z_3 * Z_2$と同型である。また向きを保つものに制限すれば自由群$Z_2 * Z_3$と同型である。

河野正晴氏の主張によれば，Uには双曲構造が入り，自己同型というよりむしろ，組合せ構造を保つ等長変換の全体と考える方がよいということである。たしかにそのとおりであると思う。思うけれども悲しいことに，我ら三バカトリオは無学文盲（まさか差別用語じゃないでしょうね？），どうしてよいやら皆目見当がつかない。

詳しくは河野大神のご託宣を仰ぐことにしよう。アラーは偉大なり！基本領域なども考えやすいことだし・・・。

基本領域といえばポアンカレを思い出しますね。モノの本によると彼は力学系の研究のために３次元多様体を調べ出したが，その方法として双曲構造を持った covering spaceの変換群ークライン群だかメビウス群だかナンカそんな風な名前がついていたっけーを分類すればよいと考えていたようだが，途中で投げ出してさっさと天国に行っちゃった。なんのことはない，私達もそんなジャングルに踏み込んでしまいましたね。まあ３次元から２次元に降ろせただけでもよしとしましょう。望みがないわけじゃなし・・・・

§5. STANDARD SYSTEM.

この節では断わらない限り，Σは regular system とし，F_Σ，E_Σ，V_Σ はそれぞれΣの face，edge，vertexの集合を表わすものとする。

5.1 <u>Definition.</u> regular system Σが

(S-1) 任意の $A \in E_\Sigma$に対して

Σは A の ghostsを丁度3個含む，

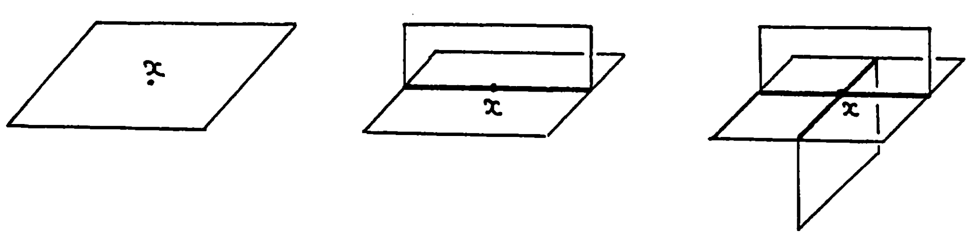
(S-2) 任意の $v \in V_\Sigma$に対して

$$\#\{A^\delta \in S_\Sigma^\pm \mid v < A^\delta\} = 4$$

を満たすとき，Σは <u>standard</u>である，という。

5.2 <u>Example.</u> $\Sigma = \{A,\ ABA^{-1}BB\}$ は standard systemである。

5.3 <u>Definition.</u>(Casler) Xを topological polyhedron とする。Xの各点xのXにおける近傍が次の3つ：



type I　　type II　　type III

のいずれかであるときXを <u>standard polyhedron</u> という：

standard polyhedron Xが或る3次元多様体に埋蔵できるときXを <u>standard spine</u> という。

5.4. <u>Proposition.</u> $K(\Sigma)$ を standard system Σ の spine complex とするとその underlying space $|K(\Sigma)|$ は standard polyhedron である。

［証明］ $x \in |K(\Sigma)|$ の近傍を調べればよい。

$x \in |\alpha|$, $\alpha \in F_\Sigma$ のとき ⇒ x は type I

$x \in |A|$, $A \in E_\Sigma$ のとき ⇒ x は type II

$x = |v|$, $v \in V_\Sigma$ のとき ⇒ x は type III

5.5. <u>Proposition.</u> standard system Σ が (D-2) を満たすならば，Σ の spine complex の underlying space $|K(\Sigma)|$ は standard spine である。

5.6. <u>Proposition.</u> standard system Σ に対して，$\# V_\Sigma = n$ ならば $\# E_\Sigma = 2n$，$\# \lambda(\Sigma) = 6n$ が成り立つ。

［証明］ 5.1の (ii) から $\# S_\Sigma^\pm = 4n$ である。ところが $\# S_\Sigma^\pm = 2(\# E_\Sigma)$ であるから，$\# E_\Sigma = 2n$ となる。
つぎに，$\Sigma = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_m \mid Q_i \in P^{i(m)}\}$ とすると，

$$\# \lambda(Q_i) = i(m)$$

であるから

$$\# \lambda(\Sigma) = \# \lambda(Q_1) + \# \lambda(Q_2) + \cdots + \# \lambda(Q_m)$$
$$= i(1) + i(2) + \cdots + i(m).$$

ところが 5.1の (i) により各 edge に対する Σ 上の ghost は3個だから

$$i(1) + i(2) + \cdots + i(m) = 3 \times \# E_\Sigma = 6n.$$
$$\therefore \# \lambda(\Sigma) = 6n.$$

5.7. <u>Definition.</u> polygonal system Σ に対して，vertex $v \in V_\Sigma$ の代表を含む Σ の junctions の数を $\eta_v(\Sigma)$ と表わす。

5.8. <u>Proposition.</u> Σが standard systemならば

$$\# \ \eta_v(\Sigma) = 4 \quad \text{for each} \quad v \in V_\Sigma$$

［証明 5.1の(ii)により，任意の $v \in V_\Sigma$ に対して

$$\# \{ A^\delta \in S_\Sigma^\pm \mid v < A^\delta \} = 4$$

である。いまそれらvと incidentな$S_\Sigma^\pm$の4つの元を

$$\{A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}, A_4^{\delta_4}\} \subset S_\Sigma^\pm$$

とする。これら4つの中から3つ取り出す方法は4種類だから，v と incidentな junctionは高々4つしかない。すなわち

$$\therefore \ \# \ \eta_v(\Sigma) \leqq 4.$$

さて $\# \ \eta_v(\Sigma) \neq 4$ すなわち $\# \ \eta_v(\Sigma) \leqq 3$ と仮定してみる。そのとき

$$\{A_i^{\delta_i}, A_j^{\delta_j}, A_k^{\delta_k}\}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j, \ j \neq k, \ k \neq i,$$

のうちどれかひとつ，たとえば $\{A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}\}$ は $\eta_v(\Sigma)$ の元でない。Σは regularだからこの組については

$$\{A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}\}, \ \{A_2^{\delta_2}, A_3^{\delta_3}\}, \ \{A_3^{\delta_3}, A_1^{\delta_1}\}$$

のうちで cornerになり得るのは高々ひとつしかない。そこで

$$\{A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}\}, \ \{A_1^{\delta_1}, A_3^{\delta_3}\} \notin \lambda(\Sigma)$$

とする。$v < A_1, A_4$ だから $A_1 \sim A_4$ を与える relationとして $\{A_1^{\delta_1}, A_4^{\delta_4}\}$ は cornerにならざるを得ない。

また，$v < A_2, A_3$ だから

$$\{A_2^{\delta_2}, A_4^{\delta_4}\} \text{ または } \{A_3^{\delta_3}, A_4^{\delta_4}\}$$

のいずれか一方は cornerにならざるを得ない。たとえば

$$\{A_2^{\delta_2}, A_4^{\delta_4}\} \in \lambda(\Sigma)$$

とするとΣの regularityから

$$\{A_1^{\delta_1}, A_4^{\delta_4}\}, \ \{A_2^{\delta_2}, A_4^{\delta_4}\} \in \lambda(\Sigma) \Rightarrow \{A_1^{\delta_1}, A_2^{\delta_2}\} \in \lambda(\Sigma)$$

となるが，これは仮定に矛盾する。他方を選んでも同様である。

したがって $\# \ \eta_v(\Sigma) = 4$ でなければならない。(証明終わり)

§6. DS SYSTEM.

6.1 Definition. (池田－井上)　2-sphere S^2 から standard spine Pへの連続写像 $f: S^2 \to P$ について考える。Pの各 0-, 1-, 2-cell α に対して $f | f^{-1}(\alpha)$ がPL同相であるならば，このfを identification map といい，$\Delta = (S^2, f)$ を DS-diagramという。

6.2 Definition. 2つの DS-diagrams $\Delta_1 = (S^2, f_1)$ と $\Delta_2 = (S^2, f_2)$　$f_i: S^2 \to P_i$ に対して P_1 から P_2 の上への同相写像 hが存在して，$h \circ f_1 = f_2$ となるならば，Δ_1と Δ_2 は同値であるという。

6.3 Definition. $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ を DS diagram Δ の 2-cellsのlabel の全体とする，α_i の boundaryを一方向に呼んだ wordを$\partial\alpha_i$とする。そのとき

$$\Sigma(\Delta) = \{\partial\alpha_1, \partial\alpha_2, \cdots, \partial\alpha_m\}$$

をΔから induceされた DS-systemという。

6.4 Proposition. $\Sigma(\Delta)$ は polygonal system である。

6.5 Theorem. Δ_1, Δ_2 を DS-diagramsとし，$\Sigma(\Delta_1)$, $\Sigma(\Delta_2)$ を，Δ_1, Δ_2 から induceされた DS-systemsとする。Δ_1, Δ_2 が同値であるための必要充分条件は$\Sigma(\Delta_1)$ と$\Sigma(\Delta_2)$ が polygonalsystemとして isomorphicであることである。

6.6 Definition.　polygonal systemΣが或る DS diagram Δから induceされた DS-systemと isomorphicであるとき，Σ を DS-systemという。

以下，断わらない限り Σは polygonal systemとし，F_Σ, E_Σ, V_Σ はそれぞれΣの face, edge, vertexの集合を表わすものとする。

6.7 <u>Proposition.</u> DS-systemは regular system である。

6.8 <u>Proposition.</u> DS-systemは developable systemである，

6.9 <u>Proposition.</u> DS-systemは standard system である。

6.10 <u>Proposition.</u> DS-system $\Sigma(\Delta)$ に対して

$$\# F_\Sigma = \# V_\Sigma - 1$$

がなりたつ。

6.11 <u>Example.</u>
$\Sigma_1 = \{ABCDE, AXDB^{-1}C^{-1}, BXEC^{-1}D^{-1}, CXAD^{-1}E^{-1}, DXBE^{-1}A^{-1}, EXCA^{-1}B^{-1}\}$ は developable system であるが DS-systemではない。（この systemは Seifert-Weber の hyperbolic dodecahedron space から得られるものである。）

$\Sigma_2 = \{A, ABA^{-1}BB\}$ は standard systemだが DS-systemでない，

$\Sigma_3 = \{A, ABAB^{-1}B^{-1}\}$ は DS-system である。（これはおなじみの「あわび」である。）

6.12 <u>Theorem.</u> Σが DS-systemであるための必要十分条件は

(i) Σは developable system,

(ii) Σは standard system,

(iii) $\# F_\Sigma = \# V_\Sigma - 1$.

の３つがなりたつことである。

6.13 Proposition. Σを developableかつ standardな polygonal systemとする。そのとき

$$\#F_\Sigma = \#V_\Sigma - 1$$

[証明] $\#V_\Sigma = n$ とすると$\#\eta(\Sigma) = 4n$, $\#E_\Sigma = 3n$ である。一方，Σの membrane complex $M(\Sigma)$ の underlying spaceである曲面$|M(\Sigma)|$ の coreは 3-regular graph である．したがってオイラー標数は $\chi(|M(\Sigma)|) = 4n - 6n = 2n$ である。

$\#F_\Sigma = m$とすると$\#\tau(\Sigma) = 2m$ だから $|M(\Sigma)|$ は$2m$個の境界を持つ。その各連結成分に 2-diskを貼って得られる閉曲面をWとすると

$$\chi(W) = \chi(|M(\Sigma)|) + 2m = 2n + 2m \leqq 2$$

$$\therefore \quad m \leqq n + 1$$

6.14. Corollary. $\#F_\Sigma = \#V_\Sigma - 1 \Rightarrow$ Wは 2-sphere.