

Polygram の DS 化

池田 裕司 (神戸大 教養)

山下 正勝 (東洋大 工)

横山 和夫 (上智大 理工)

1. DS-deformationの理論のプログラム

周知の事実であるが, DS-diagram は fake surface の池田理論であると同時に, flowの石井理論でもある.

DS-diagram の第三の解釈がある. すなわち, 多様体の多面体表現 (polyhedral representation) の理論という伝統的な立場である. ここではこの多面体表現の立場で考えてみよう.

つぎの命題を我々の目標としたい.

予想. 2つの DS-diagrams Σ_1 と Σ_2 が同じ3次元閉多様体を表わしているならば, Σ_1 と Σ_2 は DS-同値である.

我々は, 曲面のトポロジーの基本定理の証明をなぞることによってこの予想を解決しようとした. すなわち, 切り貼りの手法を3次元化し, 胞複体の理論を用いようとしたのである. しかし, いまのところ, ちょっと乗り越えがたい障壁に行く手を阻まれている. 我々はこれを横山の予想と呼んでいる. そこで, いましばらくは homeomorphism の category をあきらめ, 若干トーンを落とした metamorphism の category で作業を行なうことにする. すなわち

主定理 : 2つの DS-diagrams Σ_1 と Σ_2 が metamorphic ならば, Σ_1 と Σ_2 は DS-同値である.

この定理の証明のあらすじを述べておく. それはつぎの3つの部分に分けられる. (今回の記事はプログラム B が主題である.)

A. 基礎概念 …… polygram と metamorphism の定義
DS-diagram の組合わせ的定義
DS-deformation の定義,
種々の DS-deformations

などである. これらの概念についてはこれまでもあちこちで書きなぐってきた. 以下の B, C を書いてから再整理したいので, いまのところ, これらを昨今はやりのファジー感覚でとらえておく.

B. Polygram の DS 化: $\Gamma \rightarrow \rho(\Gamma) \rightarrow \sigma(\Gamma)$

Step 1 閉多様体の polygram Γ の各 0-label に spoon cut の処理をして新たな polygram $\rho(\Gamma)$ を作る.

Step 2 $\rho(\Gamma)$ の各 1-label に piping の処理をしてさらに新たな polygram $\sigma(\Gamma)$ を作る. これは DS-diagram である.

(註1) 上の構成法: $\Gamma \rightarrow \rho(\Gamma) \rightarrow \sigma(\Gamma)$ の well-defindness について言及しておく必要がある. すなわち, Step 1 での操作のときに, spoon cut したものを貼り直すと 0-label の star は一意に得られるが, その star を本体のどこに貼り付けるのか, 貼り付ける場所の自由度がある. この貼付場所の違いで, $\sigma_1(\Gamma)$ と $\sigma_2(\Gamma)$ が得られたとする. そのとき

『 $\sigma_1(\Gamma)$ と $\sigma_2(\Gamma)$ は DS-同値である』

ことを示す必要がある.

(註2) Σ を DS-diagram とする. そのとき

『 Σ と $\sigma(\Sigma)$ は DS-同値である』

を示しておく. これはつぎのプログラム C に必要なものである.

C. 主定理の証明

Σ_1 と Σ_2 を metamorphi な DS-diagram とする. そのとき

$$\Sigma_1 = \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_n = \Sigma_2$$

なる有限列が存在する. ただし, 各 step $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_{i+1}$ は

S- (=S₁-, S₂-) 変形 …… 細分

C-変形 …………… カラップス

CG-変形 …………… スプーン カット

(またはそれらの逆) のいずれかである.

一方, 各 Γ_i に対して, $\Gamma_i \rightarrow \sigma(\Gamma_i)$ を考えることができる.

すなわち, つぎのダイヤグラムが得られる.

$$\begin{array}{ccccccccc} \sigma(\Sigma_1) = \sigma(\Gamma_0) & \rightarrow & \sigma(\Gamma_1) & \rightarrow & \sigma(\Gamma_2) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \sigma(\Gamma_n) = \sigma(\Sigma_2) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\ \Sigma_1 = \Gamma_0 & \rightarrow & \Gamma_1 & \rightarrow & \Gamma_2 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Gamma_n = \Sigma_2 \end{array}$$

Bでの議論によって

$\Gamma_0 = \Sigma_1$ と $\sigma(\Gamma_0) = \sigma(\Sigma_1)$ は DS-同値である.

$\Gamma_n = \Sigma_2$ と $\sigma(\Gamma_n) = \sigma(\Sigma_2)$ は DS-同値である.

したがってつぎの3つの場合について証明すればよい:

◎ $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_{i+1}$ が S-変形ならば, $\sigma(\Gamma_i) \rightarrow \sigma(\Gamma_{i+1})$ は DS-同値である.

◎ $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_{i+1}$ が C-変形ならば, $\sigma(\Gamma_i) \rightarrow \sigma(\Gamma_{i+1})$ は DS-同値である.

◎ $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_{i+1}$ が CG-変形ならば $\sigma(\Gamma_i) \rightarrow \sigma(\Gamma_{i+1})$ は DS-同値である.

2. Octahedron Space

Seifert-Threlfall の教科書の第 9 章に octahedron space についての記事が載っている (61 節 Example 2). そこには

『なかみのつまった正八面体の表面を, 対面の正三角形同士を回転 $\pi/3$ のひねりで貼り合わせると, 3次元閉多様体を得られる. この多様体を octahedron space という. 図 1 は正八面体の edge network を表わしたもので …… 』

とある. 図 1 は octahedron space の 1 つの polygram Λ_1 である. (図 k が compact な 3次元多様体の polygram を表わしているとき, その polygram を Λ_k と書くことにする.)

この polygram Λ_1 は

- 同じラベルの面が 2枚ずつ計 4種 …… X, Y, Z, W
- 同じラベルの辺が 3本ずつ計 4種 …… A, B, C, D
- 同じラベルの頂点が 6個 1種 …… v

から成っている. 面は, (向きを込めた)境界辺の word を利用して

$$X = DCB, Y = CDA, Z = BAD, W = ABC$$

と書くこともある.

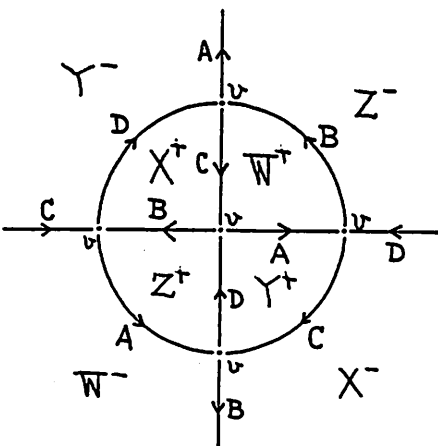


図 1

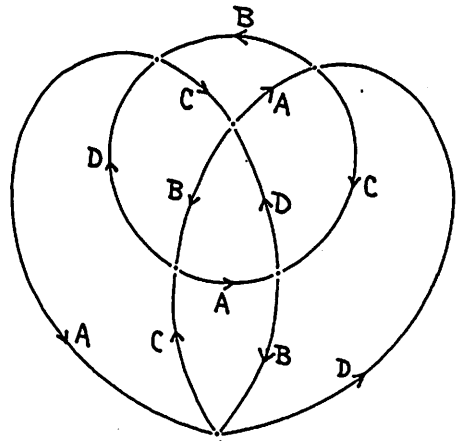


図 2

Λ_1 は (或る意味で) octahedron space の良い polygram である。しかし我々はこの表現方法に満足していない。

我々がこよなく愛する DS-diagram とは

面 は 2 枚ずつ同じラベル

辺 は 3 本ずつ同じラベル

頂点は 4 個ずつ同じラベル

という条件を備えた良い polygram のことである。 Λ_1 では惜しいことに頂点における条件だけが満たされていない。

この節ではこの Λ_1 から octahedron space の DS-diagram を構成する方法を解説する。これは単なる 1 例ではあるが、DS 化の一般的な方法の本質的な部分を十分に暗示してくれるであろう。

polygram Λ_1 の図として 図 1 を採用しても構わないのであるが、図 1 では頂点が 5 つしかないように見える (実際にはさらに無限遠点が 1 点加わっている) ので、 Λ_1 の図を図 2 の形で描いておこう。球面 (= 正八面体の表面) の 1 つの面 Z^+ の内部に選び直した無限遠点を極として、この球面を平面に立体射影すれば図 2 は得られる。

polygram の頂点のラベルのことを 0-label ということにする。polygram Λ_1 の 0-label v は、貼り合わせを実行したあとでは octahedron space Θ^3 の 1 点 v になっている。したがって $st(v, \Theta^3)$ は 3-ball になっているはずである。この $st(v, \Theta^3)$ を Θ^3 から切り離すことを考える。

$$\Theta^3 = cl\{\Theta^3 - st(v, \Theta^3)\} \cup st(v, \Theta^3)$$

$$cl\{\Theta^3 - st(v, \Theta^3)\} \cup st(v, \Theta^3) = lk(v, \Theta^3)$$

である。(※ $cl\{X\}$ とは space X の closure のこと。)

正八面体の 6 個の頂点の近くを切り落とすと、6 個の四面体と 1 個の本体 (truncated octahedron) の計 7 個に分かれる。図 3 はこれらの 7 個の polygrams Γ を表わしたものである。

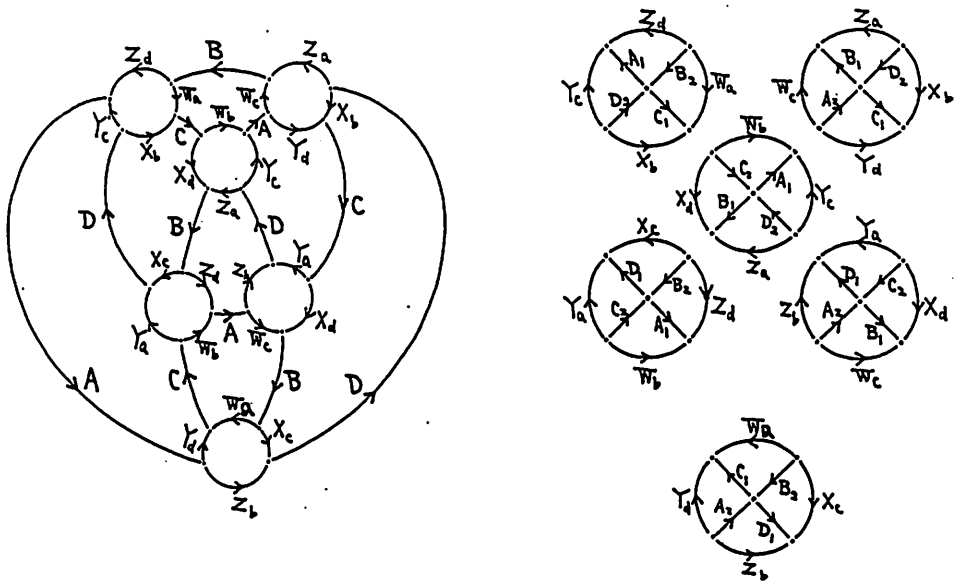


図 3

本体はそのままにしておいて、6個の四面体を拾い集めて貼り合わせると立方体状の $st(v, \Theta^3)$ が得られる (図4)。

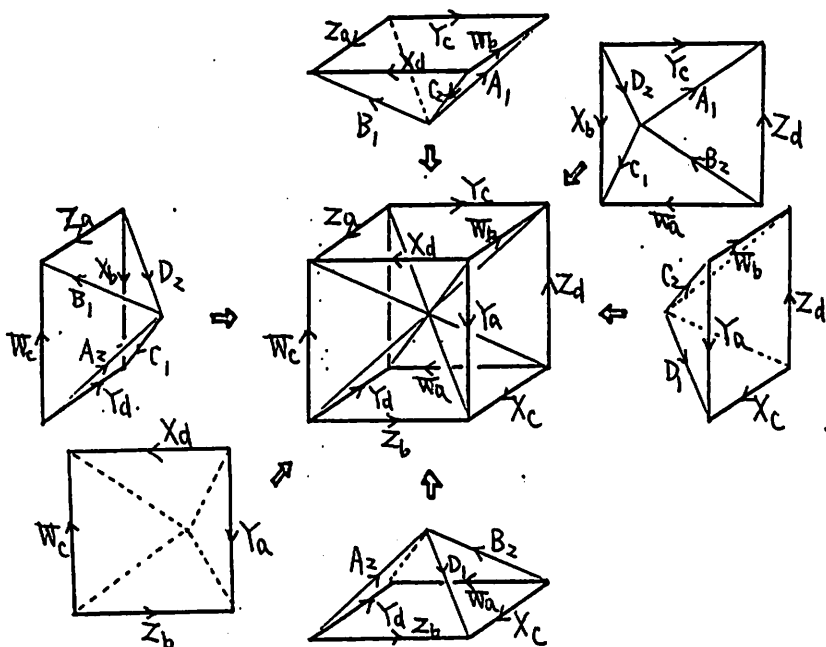


図 4

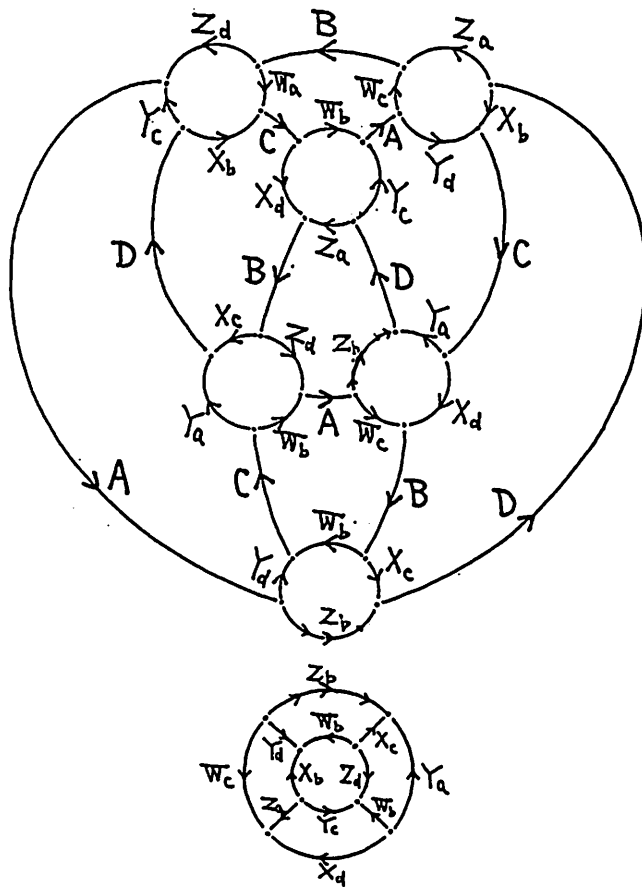


図 5

本体 $cl(\Theta^3 - st(v, \Theta^3))$ と $st(v, \Theta^3)$ の2つの polygrams を描いたものが図5である。

図5で 0-, 1-, 2-labels の数の条件を確認してみると、これは DS-diagram の条件に合致している。わるさをしてきた頂点が $st(v, \Theta^3)$ の内部に封じ込められたからである。それでは図5が求めるべき DS-diagram かという残念ながらそうではない。図5ではまだ2つの連結成分に分かれたままである。これらを1つにつなぐ必要がある。それには瞬時、目をつむってもらって

.....

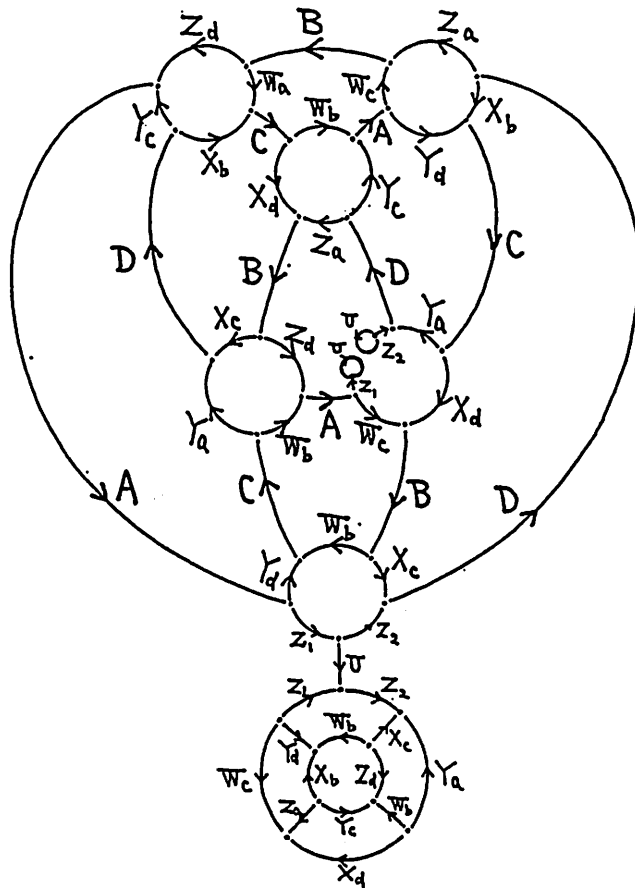


図 6

.....

ハイ！ 図6でできあがり！

さて、目をつぶっていた間に何が起きたか。図6は確かに DS-diagram である。問題はこの図6がはたして octahedron space の DS-diagram であるかどうかである。この間の事情について、次節で解説してみたい。

3. Polygram の頂点のまわりの DS 化

かつてな 3 次元 compact 多様体は 3-ball B^3 の表面を適当に同一視することにより, B^3 から構成できる. そのわけは 3 次元多様体が単体分割を許すからである. polygram はこの球面 ($= \partial B^3$) の貼り合わせの指定を明確にする図式にほかならない.

1 つの多様体は無数の polygram 表現を許すが, 一般にそれらは DS-diagram からは程遠い. しかし, 多様体 M^3 の 1 つの polygram が与えられると, その polygram の各頂点を細工し, さらに各辺を細工して M^3 の DS-diagram に直すアルゴリズムが存在する. 以下簡単のために, 対象とする多様体 M^3 はいつも閉多様体であるとする. この節では頂点の細工についてのみ述べる.

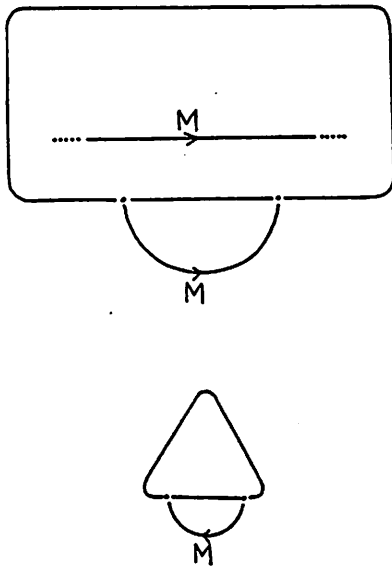


図 7

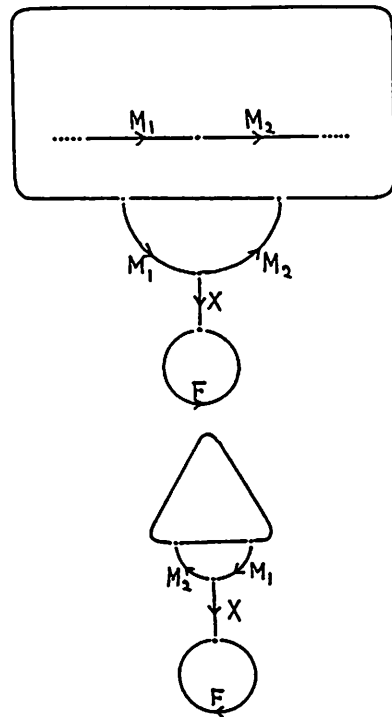


図 8

Γ を 3次元閉多様体 M^3 の1つの polygram とし, v を Γ の1つの 0-label とする. 前節の octahedron space のときに行なったように, M^3 を $st(v, M^3)$ と $cl(M^3 - st(v, M^3))$ の2つの部分に分ける. $st(v, M^3)$, $cl(M^3 - st(v, M^3))$ から induce される polygram をそれぞれ $st(v, \Gamma)$, $ext(v, \Gamma)$ と書き表わすことにする. 図7の上図は本体 $ext(v, \Gamma)$, 下図は $st(v, \Gamma)$ を表わしたつむりの図である. 図7は M^3 が前節の octahedron space Θ^3 の場合の図5に相当するものである.

$st(v, \Gamma)$ 上の辺は, 貼り合わせによって, $lk(v, M^3)$ 上の辺になる. 逆に, $lk(v, M^3)$ 上の辺の1つを M とすれば(この記号 M はなんとも味が悪い. しかし, 図にそう書いてしまったものだからどうにも仕方がない. センスの悪さが露呈してしまった) M を 1-label とするものが, $st(v, \Gamma)$ 上に1本, $ext(v, \Gamma)$ 上に2本, あわせてちょうど3本ある, この事実は Γ から図7(あるいは図2から図5)を作る方法をよく観察すればわかる.

さて, $st(v, \Gamma)$ を 本体 $ext(v, \Gamma)$ にくっつけることを考えたい. そのために, のりしろを作ろう. 1-label M を edge に持つ $st(v, \Gamma)$ 上の 2-label は2つある. そのうちの1つを τ とする. (図7では三角帽子の外側の 2-cell のラベルを τ としよう.) この τ を 2-label とするもうひとつの 2-cell が $ext(v, \Gamma)$ 上にある. (図7では, それが本体の外側にくるようにかいておく.) 1辺形 F で定まる 2-label σ を τ の内部に選び, これをのりしろとする. のりしろ σ が宙に浮かないように, 1-label X で σ を $M = M_1 M_2$ の中点に結び付けておく. 図8はこの状態を表わした図である.

こののりしろ σ で $st(v, \Gamma)$ を 本体 $ext(v, \Gamma)$ に貼り付けると図8から図9が得られる.

ここまでは自明の作業であるから, 図9の polygram Λ_9 は M^3 の polygram である. polygram Λ_9 を polygram Λ_{10} に変える つぎの定理が本節の主題である.

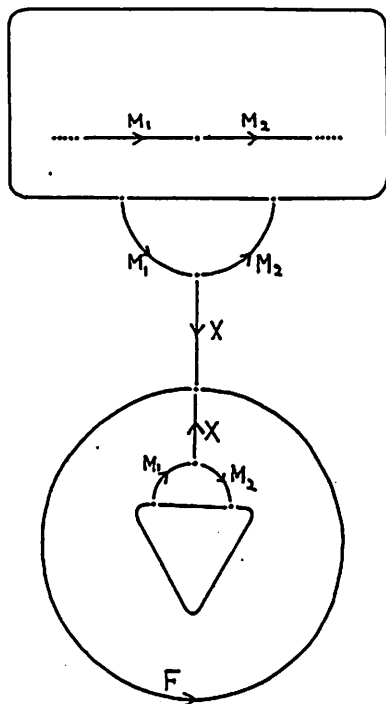


図 9

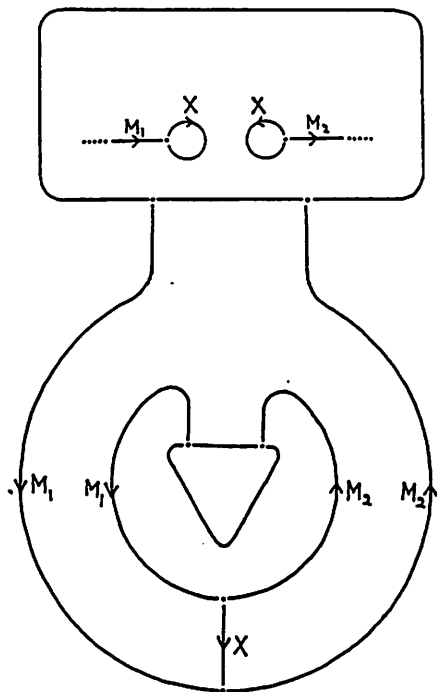


図 10

定理 1. polygram Λ_9 と polygram Λ_{3c} は metamorphic である.

ここで, metamorphic の意味を簡単に説明しておく.

多様体 M^3 の polygram に対して

S-deformation subdivision およびその逆

C-deformation collapsing およびその逆

CG-deformation cut and glue (= spoon cut)

の三種の初等的な変形が考えられる. polygram Γ に対して, これらの三種の変形を有限回施して polygram Γ^* が得られたとすれば, この Γ^* も同じ多様体 M^3 の polygram になっている.

このとき Γ と Γ^* は metamorphic であるとよぶことにした。詳しくは

Ikeda-Yamashita-Yokoyama, Deformations of DS-diagrams,
topology and Computer Science, 81-138(1987)

に書いてある。要するに、芋虫がさなぎに、さなぎが蝶に変身するように、姿かたちは変われどもその実体は同じ多様体で M^3 に変わりはない、という気分である。

話のついでだから、ここで世に有名な横山の予想を紹介しておこう。

横山の予想. Γ_1, Γ_2 が同じ3次元閉多様体の polygram であれば、 Γ_1 と Γ_2 は metamorphic である。

当初は簡単な命題だと思われた。実際、多くの人々によって証明されている。国内だけではない。イタリアのマカロ兄さんもロシアのマトベ熊さんも証明している。

我々も勿論証明した。……証明、反例、証明、反例……段々収束してきた。一碧荘では一抹の不安を抱きながらも幸せな夢を見ていた。箱根セミナーで暗転する。ものわがりの悪い仲間が納得しない。横山が別証を繰り出す。鈴木先輩が反例を作る。誰かが代案を出す。先輩の返り打ちにあう。気の毒がって、小林先輩がストーリーを変えてみる。その反例を、先輩自ら見つけてコケている。発狂した山下は絶叫している。「くつひもは間にあってる？ パンツのゴムもあるぜ。何でもいい。ひとつぐらいOKを出せ！」その後いろいろあった。グラフの根上といえば泣く子も黙るオニの代名詞だが、ごえもんの根上というのは善良な市民の代名詞である。結局のところ、証明も反例も闇の中である。そんなわけで、この命題の証明はしばらくよそう、ということになった。これが横山の『よそう』である。閑話休題(なはともあれ)……………

定理 1 の証明. 図を追いながら説明することにしよう. この定理のいちばん本質的な部分は図 9 から図 11 へ移る部分である. しかしながら, この部分は

Yamashita, DS-diagram と Heegaard diagram のなかで詳しく論じてあるからここでは省略する.

図 11 の 1-label X に関する piping で図 12 が得られる.

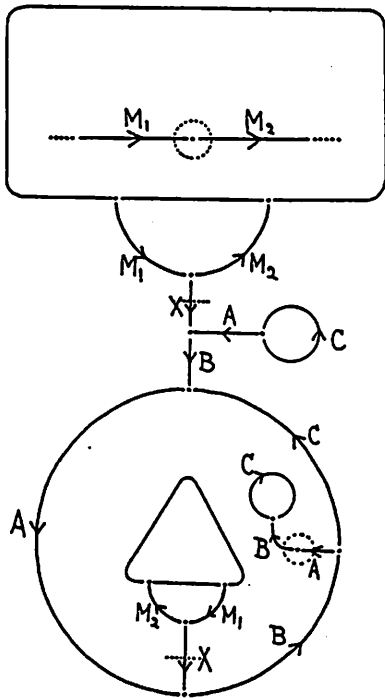


図 11

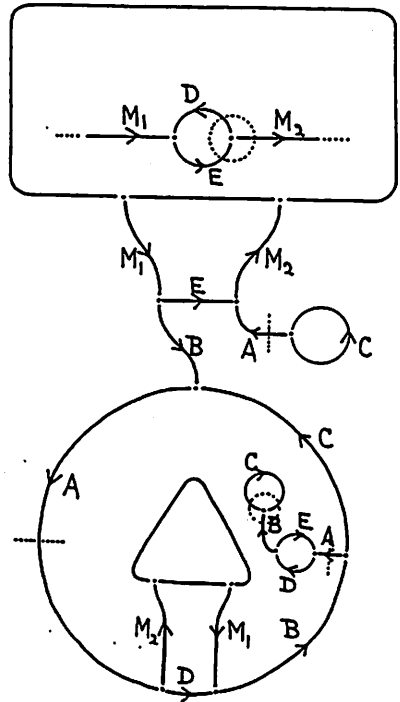


図 12

図 12 の 1-label A に関する piping で図 13 が得られる.
 図 13 の 2 辺形 CF^{-1} をつぶすと図 14 が得られる.
 図 14 の 1-label B に関する piping で図 15 が得られる.
 図 15 の 2 辺形 XF^{-1} をつぶすと図 16 (=図 10) が得られる.
 したがって図 9 と図 10 は metamorphic である.

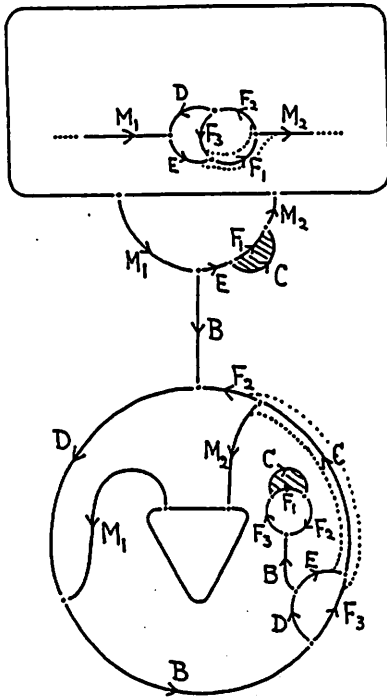


図 13

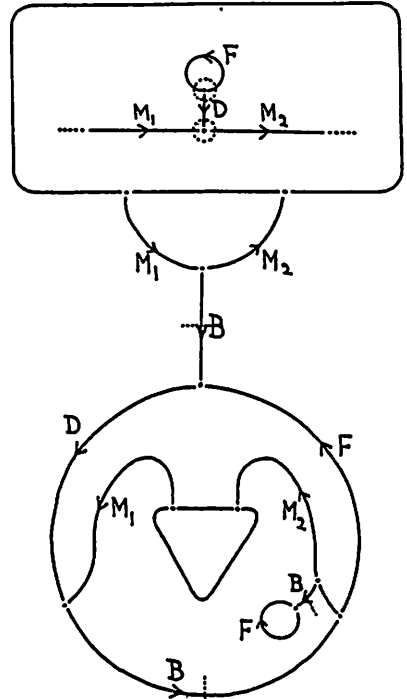


図 14

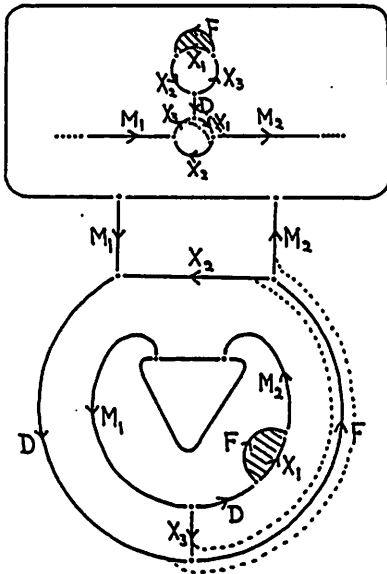


図 15

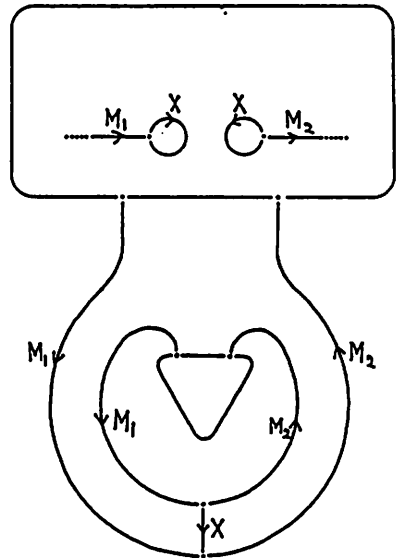


図 16

(証明おわり)

この一連の作業を octahedron space の場合で行なうと図5から図6が得られるのである。

4. Lens Space

Seifert-Threlfallの教科書第9章には octahedron space 以外にも lens space と dodecahedron space の図例が出ている. このうち dodecahedron space の図はなにもしなくてもそのまま DS-diagram になっている. ここではまず, 2節, 3節で見てきた方法を lens space に適用してみよう. 上記の教科書(60節, Example 1)には $L(3,1)$ の図が出ているが, ここでは図17から得られる polygram Λ_{17} (= 図18から得られる polygram)で頂点のDS化を試みてみる. Λ_{17} は $L(5,1)$ の polygram)である.

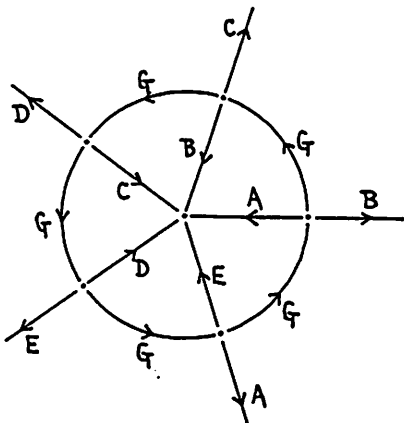


図 17

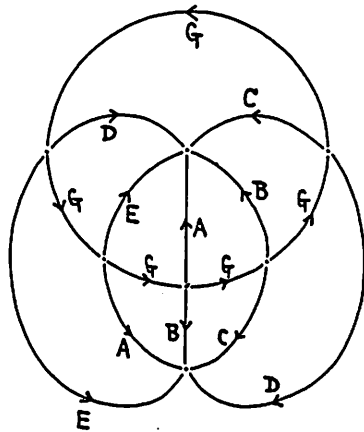


図 18

Λ_{17} の7個の頂点は5個の 0-label a と2個の 0-label b の2種類に分けられる.

図19は $L(5,1)$ から $st(a, L(5,1))$ の部分を切り取った場面である. 5個の四面体を貼り合わせると $st(a, L(5,1))$ が得られる(図20). 図21はその polygram である.

から成っている. 面は, (向きを込めた)辺の word を利用して

$X=DCB, Y=CDA, Z=BAD, W=ABC$
 と書くこともある。

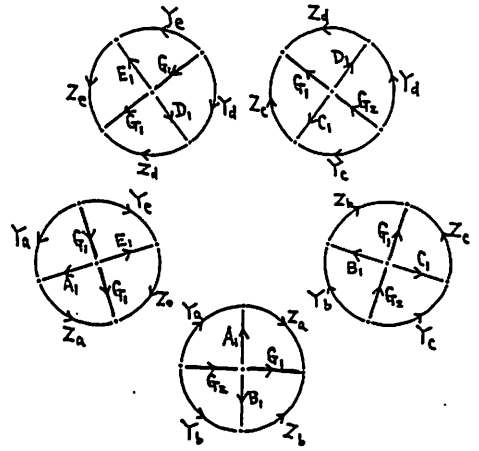
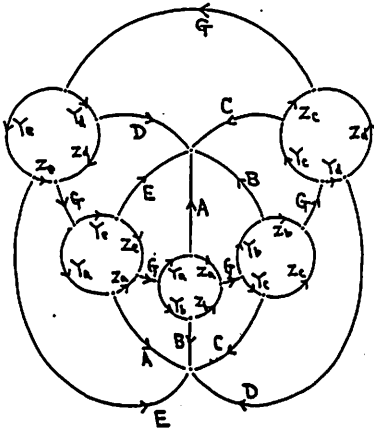


図 19

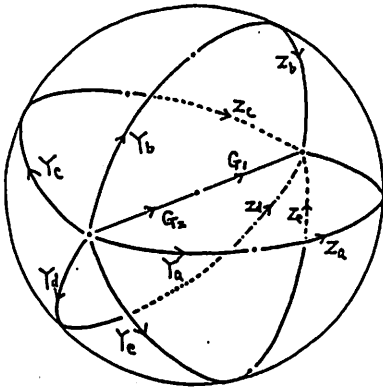


図 20

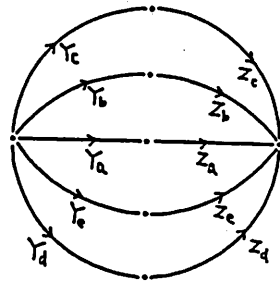


図 21

したがって前節までの方法で 0-label a のまわりを処理すると図 22 が得られる。

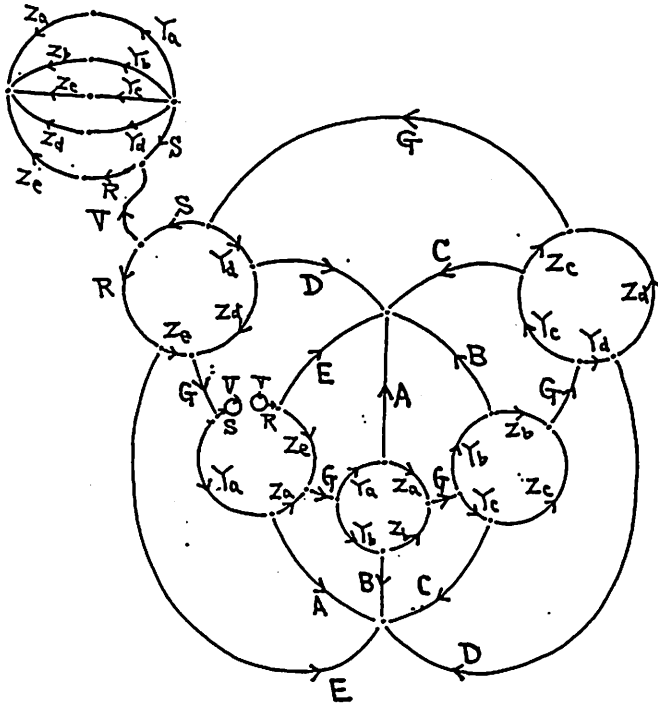


図 2 2

同じことを 0-label b のまわりでも行なってみる. 図 2 3 は $st(b, L(5, 1))$ の部分を切り取った場面である. この 2 個の半球を赤道面で貼り合わせれば本物の $st(b, L(5, 1))$ が得られる (図 2 4). その polygram は図 2 5 であるから 0-label b のまわりの処理を行なうと図 2 6 が得られる.

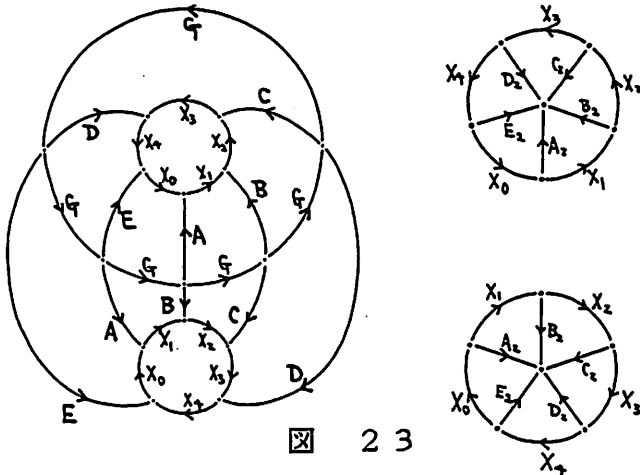
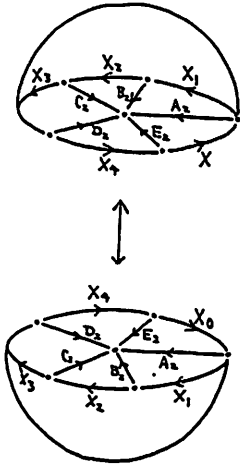
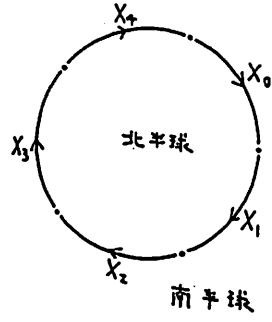
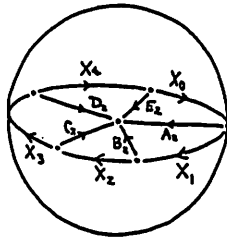


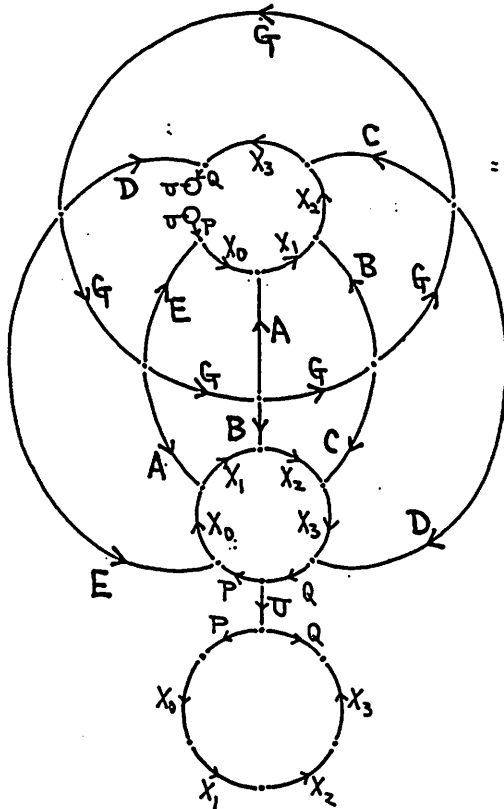
図 2 3



☒ 24



☒ 25



☒ 26

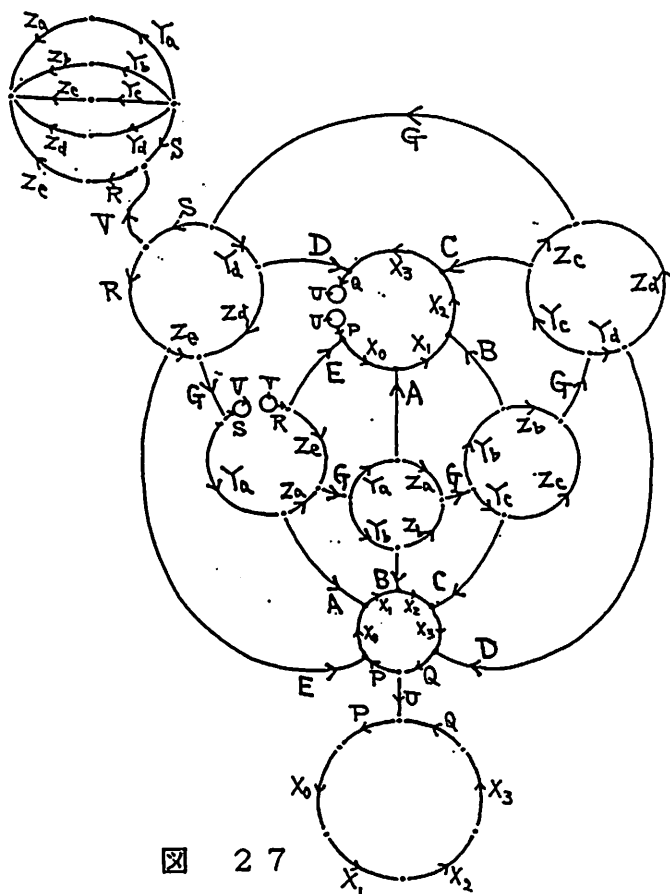
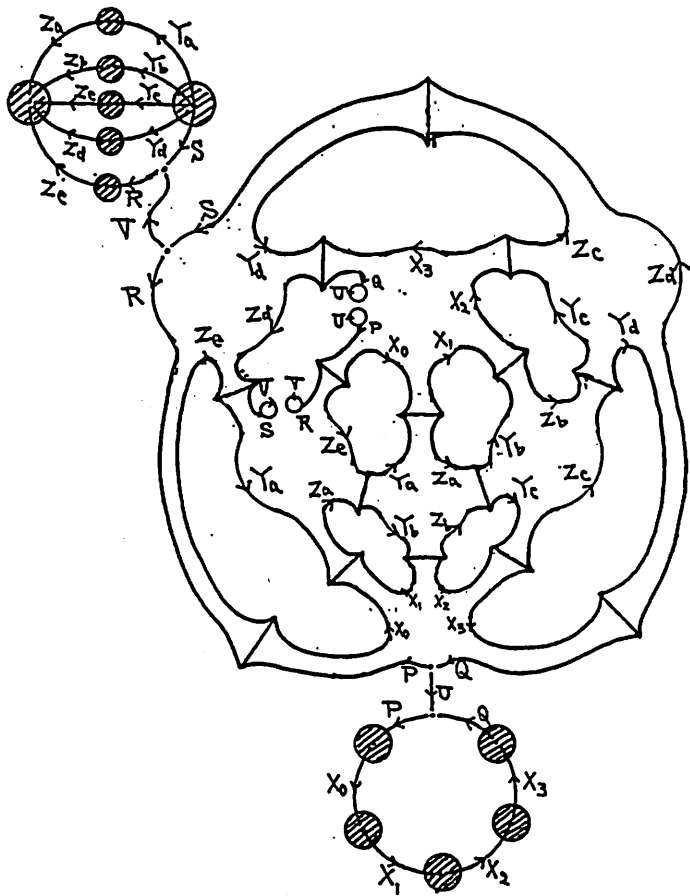


図 27

図27は2種の 0-label a, b の双方をともに DS 化したものである。しかし、全体としてみれば、未だ DS 化は完了していない。それは $L(5,1)$ の最初の polygram Λ_{17} での 1-labels に対応する部分が未処理だからである。

図27で表わされる polygram Λ_{27} に含まれる 1-labels は、最初の polygram Λ_{17} の 1-labels (これを第1種の 1-labels と言おう) と、0-label の star を切り取ったとき発生した新たな 1-labels (これを第2種の 1-labels と言おう) から成る。第1種の 1-labels は A, B, C, D, E および G の6種である(残りはすべて第2種)。これら第1種の 1-labels をことごとく piping してやれば(図28), $L(5,1)$ の DS-diagram が完成する。



☒ 28

5. Polygram の DS 化

一般に 3 次元閉多様体 M^3 の polygram Γ が 1 つ与えられたとき、まず Γ のすべての 0-labels に 3 節の処理を施す。各 0-label に対し、この処理はその近傍だけにしか影響を与えないので、処理すべき 0-labels の順序は関係ない。したがって一斉に処理することも可能である。こうして得られた新たな polygram を $\rho(\Gamma)$ と表わそう。

$\rho(\Gamma)$ の 1-labels は、それらが

Γ から遺伝してきた 1-labels であるとき …… 第 1 種

新たに発生した 1-labels であるとき …… 第 2 種

と呼ばれる。

第 1 種の各 1-label を piping で変形する。この piping の操作は他の第 1 種の 1-labels およびそれらの piping には一切影響を与えない。したがって、この操作はすべての第 1 種の 1-labels に対して同時に適用することができる。その結果得られた polygram を $\sigma(\Gamma)$ と書くことにする。次の定理はいまや明らかである。

定理 2. $\sigma(\Gamma)$ は M^3 の DS-diagram である。

polygram Γ から $\rho(\Gamma)$ を経て作られた DS-diagram $\sigma(\Gamma)$ は、 Γ から DS-diagram を作るための最短コースであるとは限らない。たとえば octahedral space の場合には、0-label の処理が済んだ段階ですでに DS-diagram になっているので、DS-diagram が欲しいだけならば、1-labels への処理は不要である。また、polygram によっては、すべての 0-labels を処理しなければ 1-labels の処理に移れないというわけでもないし、第 1 種の 1-labels がすべて悪い 1-labels というわけでもない。 (完)