Combinatorial flow-spines

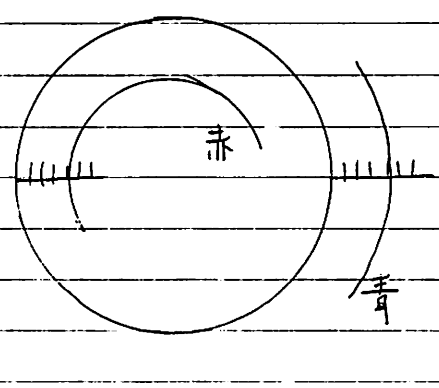
池田裕司(神戸大教養)
河野正晴(神戸大教養)

flow-spine は言わずと知れた石井一平氏の発見又は発明で、closed 3-manifold を扱う上で spine としては取って代るものは今の所ないし、多分これからも ――― もっと良い class が見付かるとしても、flow-spine がその元になるだろうと思われる。

ところで flow-spine には E-data なるものが対応しているのだが、E-data の世界は flow-spine のそれより確実に広くて、余り好ましくない現象が生じている。その不良分子、不良 spine とでも言おう、を取り除いて、良い data だけ残す事が出来たら良いなと誰しも思うだろう。その正体を暴いて石をぶつけてやりたいのが動機である。

例を以って始めよう。

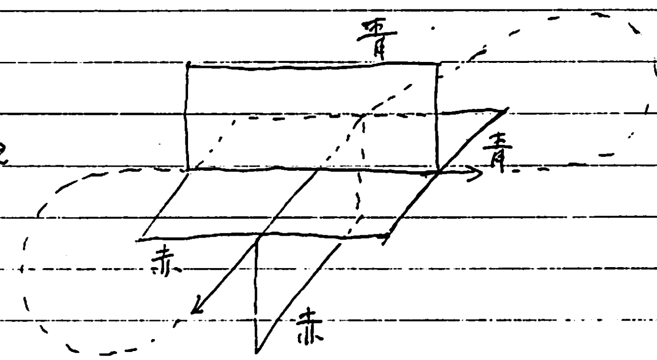
Fig.1



これはアワビの E-data である。

このE-cycleの近傍に内側に赤，外側に青のcircleを取ると，その赤線，青線はアワビ上で

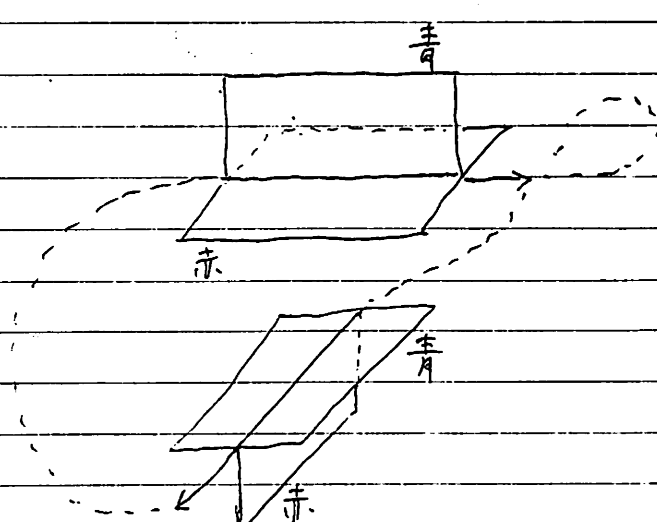
Fig. 2



となっている。

これはアワビに限らずDS-diagram with E-cycleについては同じ状態になっている。即ち，3-rd singularityの各点でFig. 2が満たされている。

ここで真中の四角の円板を上下にはがす事を考える。



3-rd singularity の1点でこの操作を行うと、結果はやはり赤線、青線が描かれているから、帰納的に S×T に落ち着く事になる。

逆に S×T の2本の boundary に赤線、青線を書いておいて、S×T からの Fig. 2 を満たす cont. map の image U を定義する。更に U の boundary circles に1枚ずつ disk を貼りつけて closed fake surface P を作る。この P の集合を E-class とでも呼ぼう。

すると、ヲフビは勿論、DS-diagram with E-cycle から定まる closed fake surface 即ち flow-spine は全て E-class に属する事になる。

(注) DS-diagram with E-cycle と flow-spine が同義である事は石井氏により証明されています。

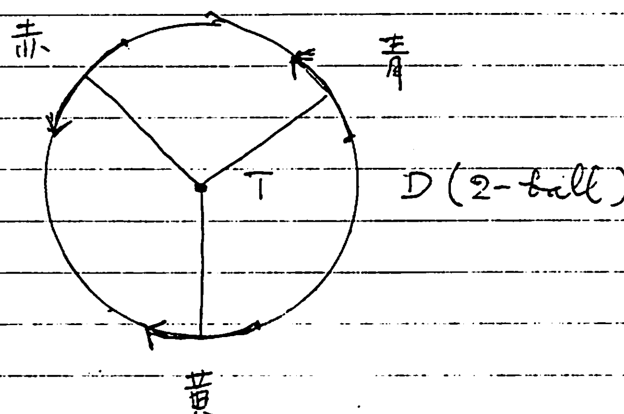
さて E-class は名前負けしてはいないか心配であります。
世の中に多々気に喰わない事はあるけれど
例えば、ある種の E-data に関して、DS-diagram を描こうと努力しても
(1) graph が connected にならない。
(2) 妙な交わりが出来て DS-diagram にならない。
などは実に不愉快な現象であろう。
E-class で、もしも、これら不良分子を少しでも捉える事が出来るならば少しは顔も立つ…かな？

$\forall P \in$ E-class, $\exists$ 3-manifold $W \ni W \searrow P$

が成立します。
証明はごとに大抵の場合出来ない類の定理です。
これから E-class の要素を E-spine と言っても良い。

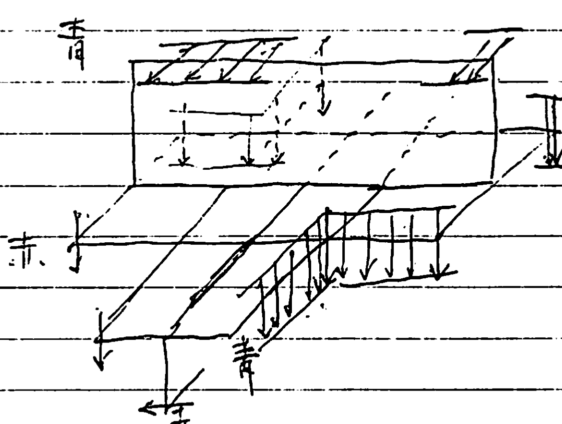
証明の方法

S×T を solid torus S×D の中に入れておく。



すると S×T → U の cont. map は S×D → N(U) に自然に拡張される。 N(U) は handlebody.
U の boundary circle C を N(U) にとって N(U) の boundary での C の近傍を考えると、それは S×(上の矢印) で構成されていて、矢印の向きは C を一周しても変らない事が

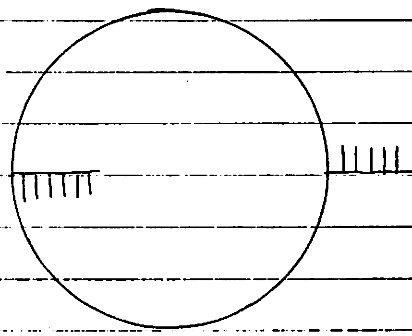
Fig. 3



から確められる。

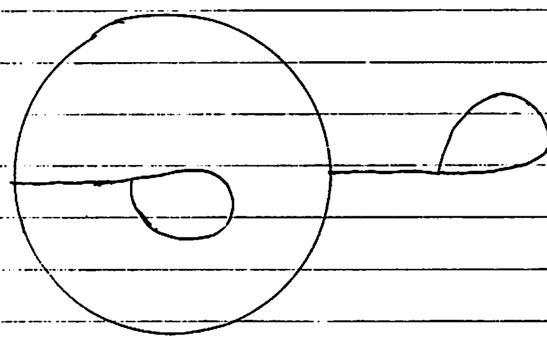
三個の例の中の二個目。

Fig.4



これも E-data である。アワビとは影の部分が異なる。
Fig.3 で定まる closed fake surface は E-spine,
ところが 3-rd singularity が丁度1点である
flow-spine はアワビだけである事は石井氏に聞か
なくても分る。聞いても解る。何を言いたいかと云うと,
この E-spine は明らかに不良-spine であると云う事。

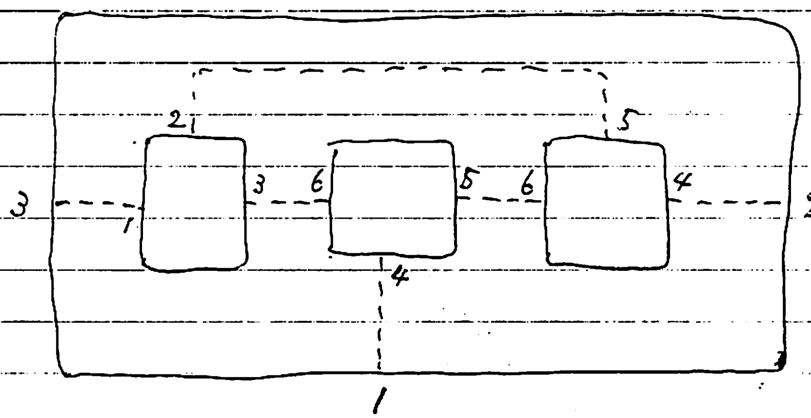
G:



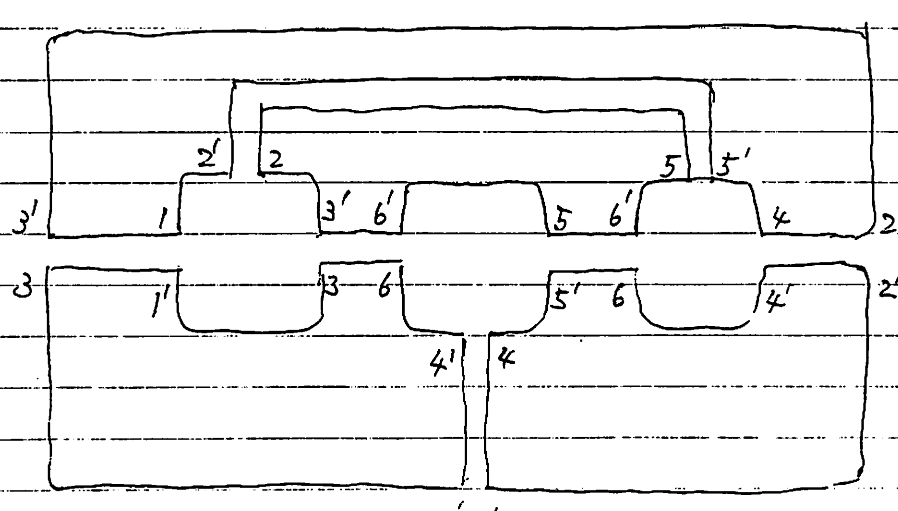
グラフとしてはこうなる外ないのは当然である。
Gはどこにあるか?
W の boundary 上に。
Gはどのようにあるか, W の boundary は何か?
これも知りたい。

boundary の homeomorphism type から調べる。

まず ε-neighborhood U の近傍(3次元) H(U) の boundary は 3つ穴のあいた 2-ball の boundary を Fig. 5 に示された通り貼り合わせて得られる。



これは H(U) を 0-handle と 1-handle に分解して その identification から作ったもので、更に 2-handle を貼りつけるべき中心線を点線で示した。
従って W の boundary は



に2-ballを2枚貼りつけた2-manifoldである。
これは Klein bottle です。
以上のような方法で W の boundary は勿論求められるのであるが、この方法は古臭い。
次に我々の新手法をお目に掛ける。
E-neighborhood に於て赤線、青線と 2nd singularity とで自然に"囲まれた"部分をそれぞれ赤線地帯、青線地帯と呼ぶことにする。
ここで $P-$赤線地帯$=S_R$, $P-$青線地帯$=S_B$ とおくと、S_B, S_R は共に Möbius band になっている。だから W の boundary は S_B と S_R の boundary を identify したもの、即ち、Klein bottle である事が解ります。
以上から、Fig. 4. の E-cycle の内、外は共に Möbius band なのです。DISK ではありません！
では G の内側、外側の1角形? はその Möbius band のどこにあるか という問題を扱います。
解答は S_B 上に描かれている 2nd singularity がそのまま現われる事になっています。
従って1角形? は Möbius band の中心線です。
$\pi_1(W)=\langle a,b \mid a^2ba^{-1}b^{-2}\rangle$, W の homeo type は不明。
以上述べた議論は一般性を持っていて、S_B, S_R は例の local-section と同じ役割を果しているものです。
但し、この local-section は disk とは限らないし、connected とも限りません。更に S_B, S_R の一方が disk であっても他方が disk である保証はないし、connectivity に関しても事情は同じです。
S_B, S_R が共に disk である条件を E-neighborhood, E-data の言葉で記述する事が flow-spine の E-class に於ける位置付けに近付く事になる。

第三の例

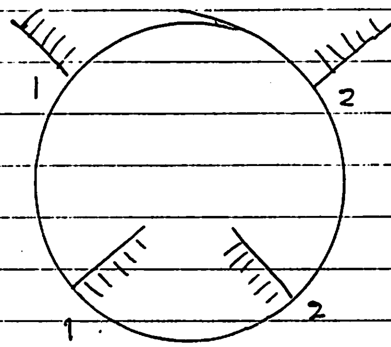


Fig. 5

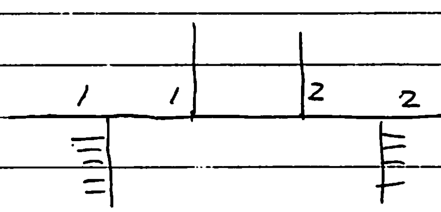
これは DS-diagram を描こうとすると connectivity が崩れる例です。

Fig. 5 の E-data で表される E-spine P を持つ 3-manifold W について；

S_B, S_R は共に connected component を2つずつ持っているので W の ~~co~~ boundary の connected component の個数は 3 となります。

S_B が connected でないと云う事実を Fig. 5 の E-data からどのように読むか，これは一つの問題でしょう。

その解答は，E-data 上に

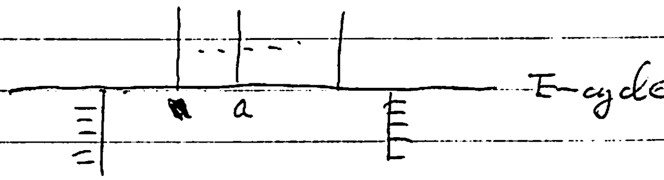


と云う場所があるからです。

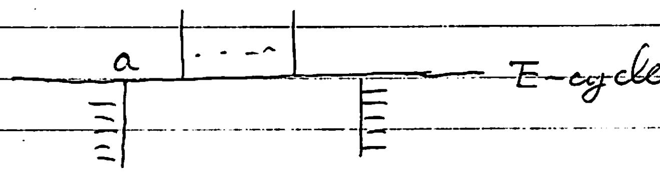
これは 石井氏も指摘している通り，W の boundary が connected でない十分条件であります。

E-class で考えれば，必要条件でもあります。

E-data 上で



に対して



となっている部分が存在するし，逆も…

という一般化が出来るので，Wの boundary の connectedness については E-data 上で必要十分条件が得られます。

即ち，Wの boundary が connected である必要十分条件は上のような場所がない事である。

となります。

グラフの connectivity と Wの boundary のそれは同等になっているのです。

Wの boundary に関してもう一つ情報があります。
S_B, S_R をその boundary で貼り合わせた結果の 2-manifold は，S_B, S_R の Euler number は同じだから，genus が even でなければならない。

という事は E-class は closed 3-manifold よりは大きいが，3-manifold 全体よりは小さい となります。大きい方が良いかどうかは別にして，E-data を扱うには丁度良い class ではないだろうか？

meta E-data を扱おうとすると，又々 山下ムチャ勝論上でもなるのだろうか？