

統一 DS-diagrams の変形

池田 裕司
(神戸大学 教養部)

G は connected 3-regular graph を 2-sphere S^2 に embed されているとする。

$\Delta = (S^2, G, f)$ を DS-diagram と表す可。但し f は identification map である。

"closed 3-manifold は全て DS-diagram with E-cycle で記述出来る"

と言う石井丸の結果において我々は主として DS-diagram with E-cycle に着目する事になる。

この E-cycle は flow と密接な関係が有って、
すなわち石井丸の論文 (combinatorial ---, 1986, Kobe J. of Math.) を参照したい。筆者も知りたかった問題の解答がそこにある。

ある 3-manifold を表す可 DS-diagram は 1つあるので
それ等にとのちなる関係を見出せるかと言う問題は極めて自然である。

B^3 を 3-ball として S^2 を B^3 の boundary と考えれば
 S^2/f は 3-manifold B^3/f の spine になっている。

$B^3/f = M$ 内の simple homotopy equivalence の範囲で

$S^2/f = P$ を変形して別の spine P' を作り、その DS-diagram Δ' と Δ を比較する。当然の事ながら M と M' は homeomorphic である。

山下, 横山, 西丸による変形理論は大略このように思想に基づいていると思われろ。EからE'への変換として, 非常に良く似てはいるのだが可算無限のtypeがあるように思っていたものがあつた。従つて Δ から Δ' へも...

ところが 山下氏は "generator" を見つけ出して来てそれ等は独立ではないと云うのである。キトクヤシイので正確には書かない。詳細は本巻山下氏の報告を参照の事。

もう一つの方角: (S^2, G) に対しては G の頂点, 辺, G による face には f によって label が定まっている。今度は Δ と Δ' が似ていると云う概念を先に考える。

その一つが例として dimension である。こうすると manifold の方はある class が定まり事になるので当然その class に属する manifolds の homeo type はどのような関係を持つかを論じなければならぬ。

" 3 -manifold の根源" と " 3 -manifold は如何にして創られたか" に対する一つの立場と思ふ。

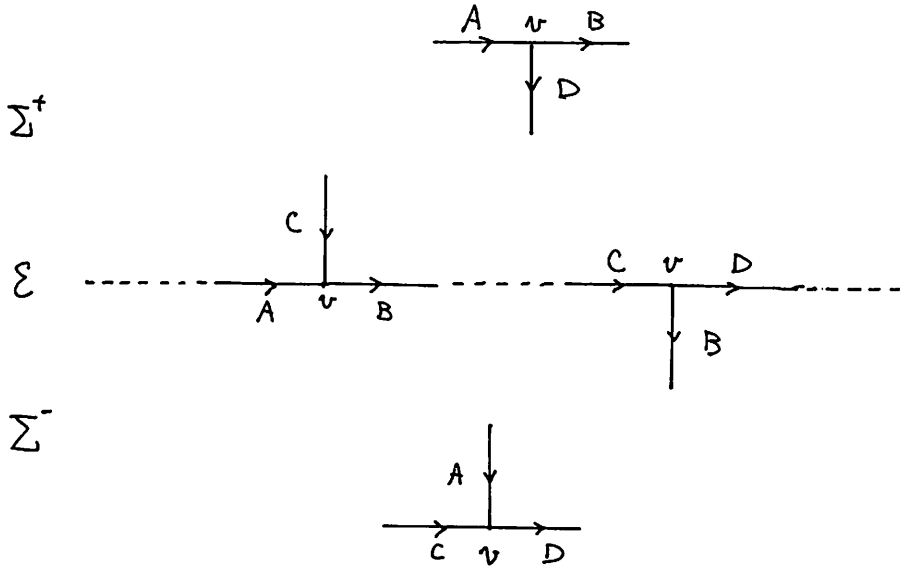
dimension に就て云へば, i.e. $\Delta' = (S^2, G', f')$ が Δ の dimension である時, G' と G の頂点数は同じになっている。

しかし, 普通, "根源" を求めたいと思へば, 頂点数を小さくしようと思ふであらう。

今回は dimension の続きとしてこの問題に対する報告をする。

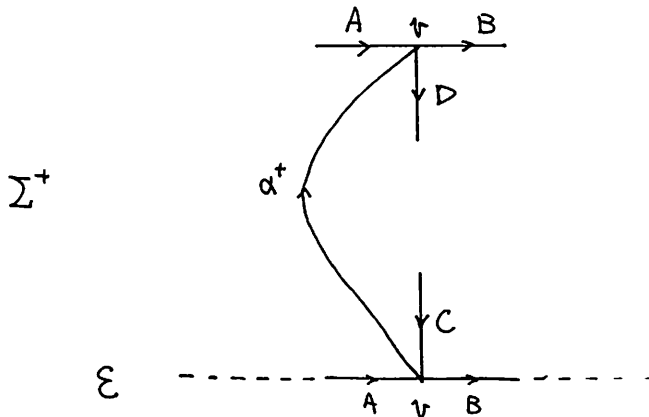
以下では DS-diagram は E-cycle を持つとして扱うが, 紹介する方法そのものは一般的な DS-diagram についても有効であつて, E-cycle 付きと云ふ条件は case を少なくする等の点で議論を simple にする効用がある。最初と最後は E-cycle 付きで十分なのである。

$\Delta = (S^2, G, f)$ を DS-diagram, Σ は Δ の E-cycle とす。
 S^2 上での配置は 次のまゝになっている。... 例として



(注) $M = B^3/f$ が orientable の場合は どの頂点について も このまゝに見える。

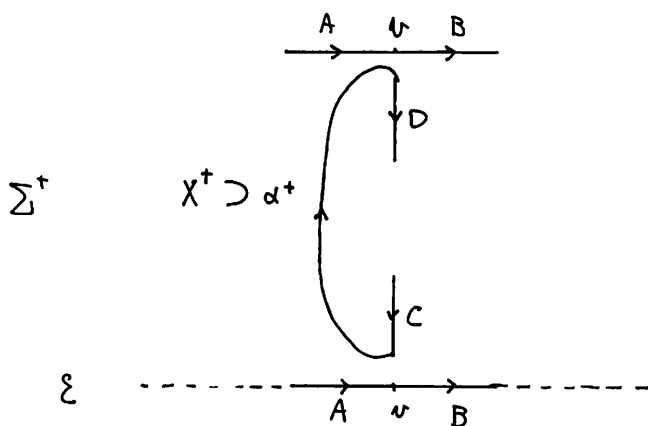
Σ^+ の状態が 次の通りである時と考える。



即ち、 α^+ は boundary から 2つの v まであって他の頂点及び edge とは交わらない arc である。

だから、 α^+ はある 1つの face に含まれる弧で、それを X^+ と書いて置く。

この時、 G を次のように変化させた。



次に v を消し、 AB を $A'B'$ 、 $C\alpha^+D$ を C' と名前を付け、矢印は元の通りとする。

Σ^- で同様の arc α^- を考えて同様に变化させる。

この時は CD が C' 、 $A\alpha^-B$ が A' となる。

注意すべきは $\alpha^-C X^-$ となるように採らねばならない事である。

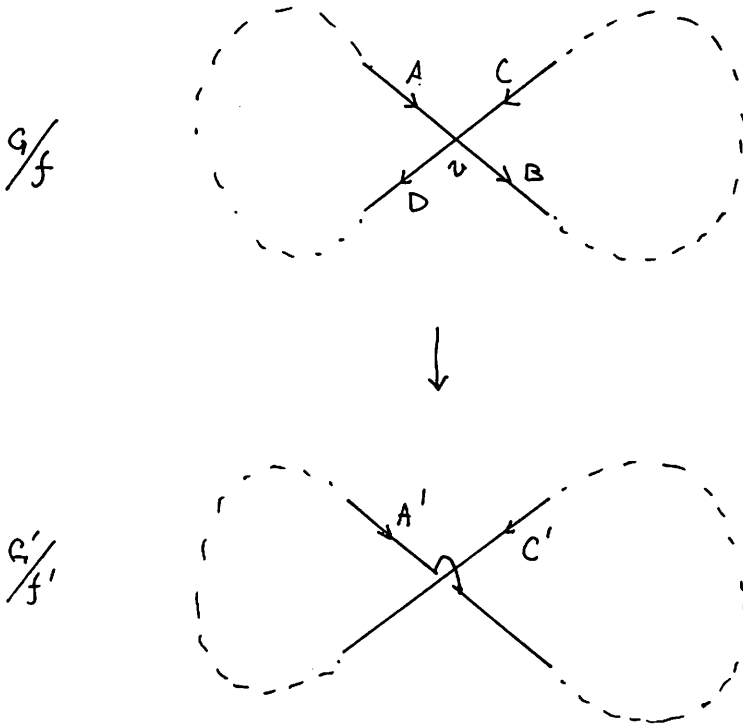
これで出来上がった graph を G' とおくと、勿論 3-regular である。しかし connected になっている保証はない。

だから、善い具合に、 G' に既に付いている label を用いて、 (S^2, G') が DS-diagram Δ' になっている時に、我々の

Δ と Δ' が似ていると主張する事になるのである、何れも connected である face の identification を作らなければいけない。

<休憩>

G' の頂点, 辺に定まっている identification map を f' とし,
 G/f と G'/f' と比較する。

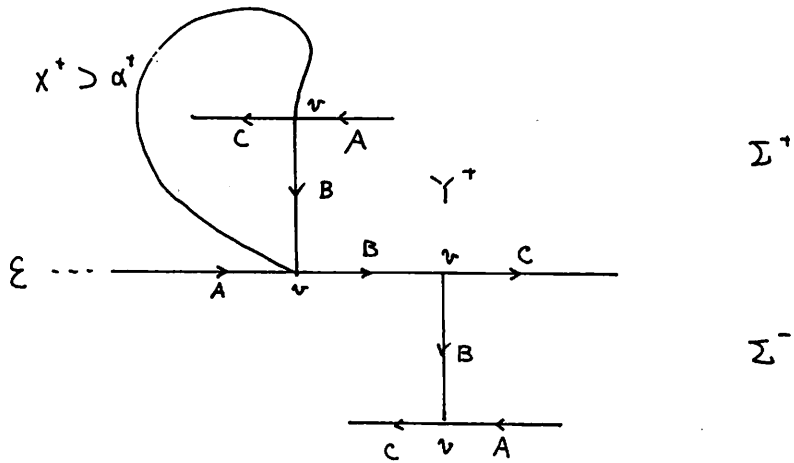


点線の部分は変化なし。

これを spine の言葉で云えば, 3-d singularities が
 一つ少くなっていること ~~事~~ である。

(注) $\Delta \rightarrow \Delta'$ の変換に対応して逆の変換も定義
 出来るから, これを先の diversion に併せて, やはり
 equivalence relation とする事が出来る。

Example 1.



なる α^+ の存在を仮定可了。

$G(\alpha^+)$ で G を α^+ で変形した graph を示す。

$G(\alpha^+)$ が connected

$\Leftrightarrow \Sigma^+$ の A から B を通らざるに ε と繋がっている。

$$[X^+] = AB^{-1}C w_1, C^{-1}A^{-1}w_2$$

と書ける。

w_2 が A を含む。

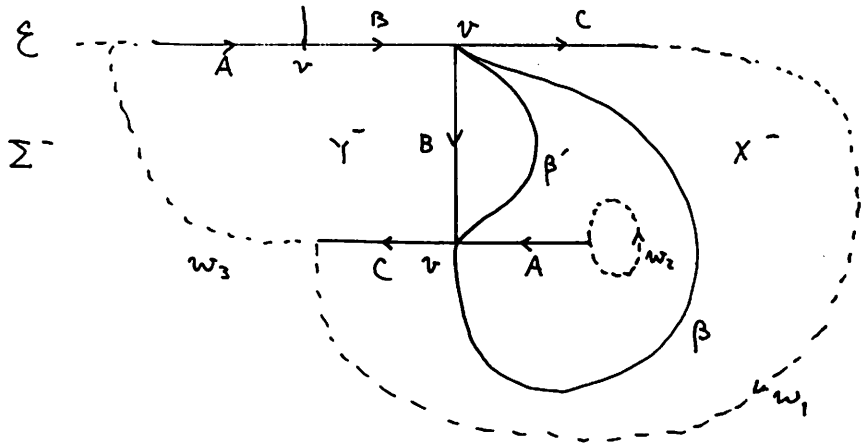
と 3.3 条件 に反する。

別の言い方をすれば

$$X^+ \neq Y^+$$

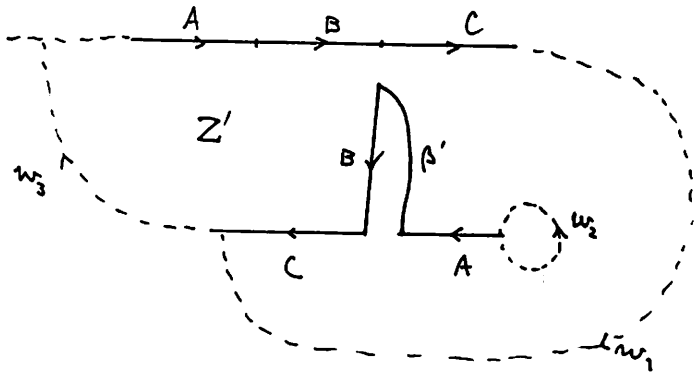
としてよい。

次に この α^+ に対して α^- の存在, 積積の自由度について調べて見よう。



可能性のあるのはこの β と β' である。

1. d^- として β' を採用した場合



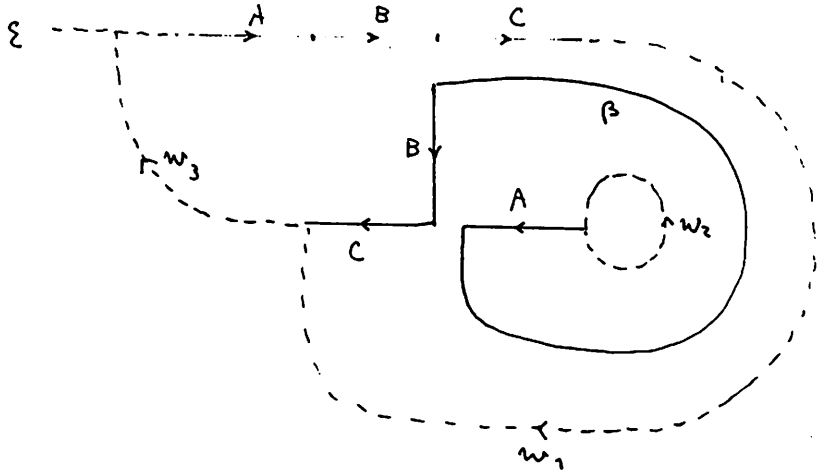
この場合 ABC が一本の edge になって

$$[Z'] = (ABC) w_3 (ABC) w_1 (ABC)^{-1} w_2$$

であり, face の identification を与く行っていて
頂点数が下度 4 個少なくなった DS-diagram
with F-cycle になった。

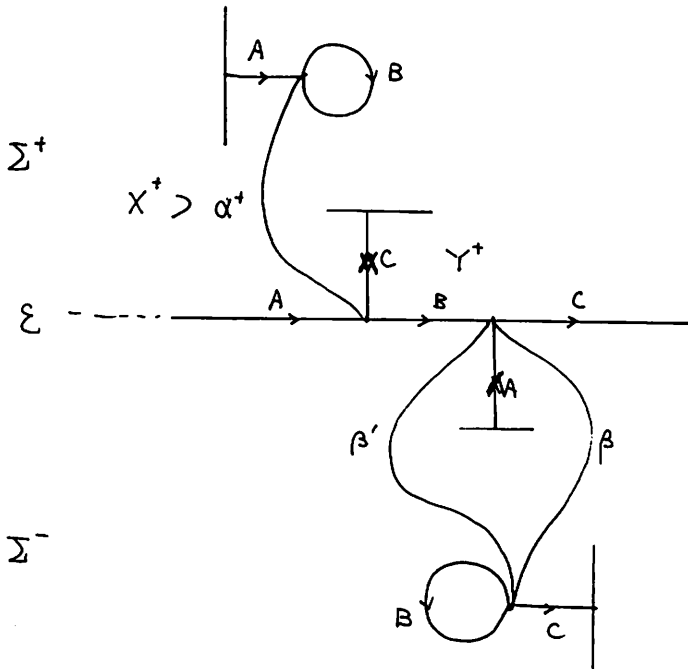
この F-cycle は旧 F-cycle Σ^- で頂点 v を消して
ABC を一本の edge にした。

2. α^+ と β を採用した場合



とすると β' を採用した場合と全く同じである。

Example 2.



したがって α^+ の存在は仮定可。

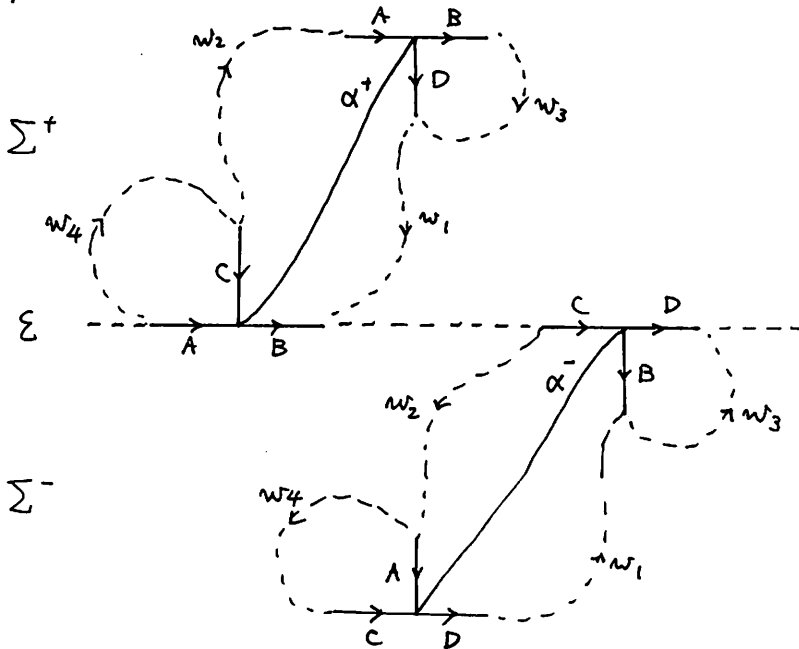
この時,

β と β' が存在するためには $X^+ = Y^+$ でなければならぬ。

そしてどちらかが存在すれば両方存在する。

α^- と α^+ β, β' どちらを採用しても出来た DS -diagram は unique である。

Example 3



この例について homeo type の変化を調べた。

方法は diversion の場合と全く同じである。

1. 問題の場所を含んで surface F を M 内にとる。この例では F は torus になっている。
2. F が bound する 3-manifold (問題の場所を含む方) を調べるためにその spine をみると、この場合は circle である。従ってその manifold M_1 は solid torus

になっている事が確かめられる。

3. 変形後の manifold についても内題の 3-manifold は solid torus であるので, この変形は Dehn surgery と考えて良い。← Big Remark! による。
4. 両方の solid torus の meridian disk の位置を上下で調べると, この場合は全く同じに採れる。
5. 従ってこの例では homeo type は不変である。

(註) (i) 下, M_1 の採り方は昨年の報告参照。

- (ii) 4 の meridian disk の位置を調べるとは 2 の spine である circle が本質的に例示は α^+ と思って良い事から, α^+ と一点で交わる disk を M_1 内で具体的に作って見れば良い。

このように場合分けを行って homeo type の変化について多少の議論は出来る。

次に昨年の diversion と今回の変形との関連を一つ述べる。

Example 1 に戻す。

先ず diversion を行ってから, この変形を行なったとして結果を比較する。

実際に描けば, 全く同じ DS-diagram が得られる。

尚, 頂点数の増減に拘り, 石井式変形と云う傑作が既に知られているが, それはここで紹介する方法では cover 出来な。まうに思う。

< 2.4 > 通の変形

