DS-diagram with E-cycle についての非基本変形の基本的問題

池田裕司
(神戸大学 教養部)

京都大学数理解析研究所講究録 563 (以下 K.563 と書く) に於て導入された DS-diagram に対する非基本変形, 即ち横変形 II と I, に関する基本的問題というのは次の通りである。

問題 : Δ_1, Δ_2 を DS-diagram とし, Δ_2 は Δ_1 に横変形を1回行って得られるとする。Δ_i によって定まる closed 3-manifold を W_i とおいて, W_1 と W_2 の homeo type がどの程度異なるか判定せよ。

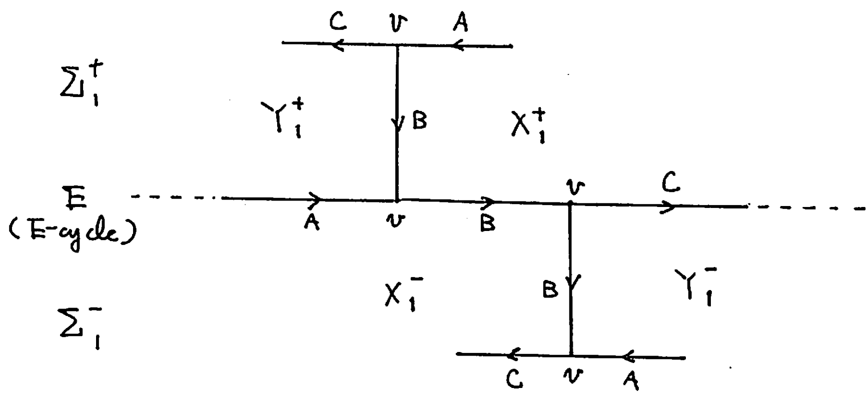
極めて一般的な解答としては, 東海大・山下氏も指摘した通り次が成立する。

定理 1. W_2 は W_1 の Dehn surgery で得られる。

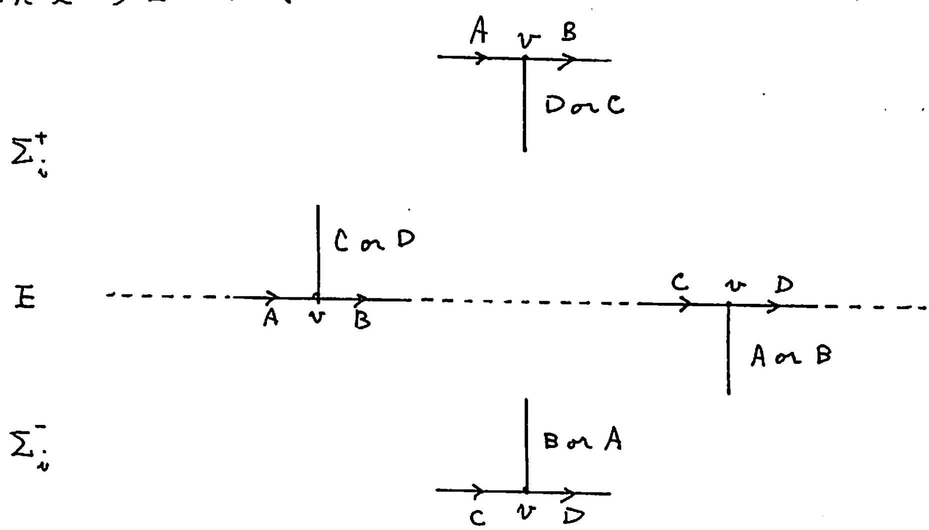
勿論, この Dehn surgery に於ける meridian の変化の様子は確定出来る。しかし, 我々はもっと良い解答を持っているから, 以下ではその結果と方法の報告を行なう。
これから扱う DS-diagram は指定された E-cycle を持ち, 横変形 II, I は共にその E-cycle を保存するものとするが, 紹介する方法は一般の DS-diagram についても有効であるし, 場合を尽せば結果も自ずと出て来る。

記号を次の通りに特定しておく。

横変形II について　$\Delta_1=(S^2, G_1, f_1)$



横変形I について



v で横変形Iを行なう時の pair of lateral stripes を (U, V) として、$\Sigma_1^+ \supset X_1^+ \supset U$, $\Sigma_1^- \supset X_1^- \supset V$ であるとしておく。

Remark. 部分的に上図の通りになっている事については K.563 の議論を参照の事.

結果を述べる。

定理2. 横変形IIについて

(i) $[Y_1] = ACw \Rightarrow W_2 = W_1 \# P^3$

(ii) $X_1^+ = Y_1^+ \Rightarrow W_2 = W_1$

定理3. 横変形Iについて(仮定の読み方要注意)

(i) $[X_1] = AxAyA^{-1}z$

又は $[X_1] = AxA^{-1}y \neq ABz$

$\Rightarrow W_2 = W_1$

(ii) $[X_1] = ABxCDy \neq Ax'Ay'A^{-1}z$

$\Rightarrow W_1 = W \# S^1 \times S^2,\ W_2 = W \# P^3$

又は $W_2 = W \# S^1 \times S^2,\ W_1 = W \# P^3$

K.563の最後のstatement‥connected sumの件‥は
この2つの定理のcorollaryとなる，寧ろ動機はそこにあった。

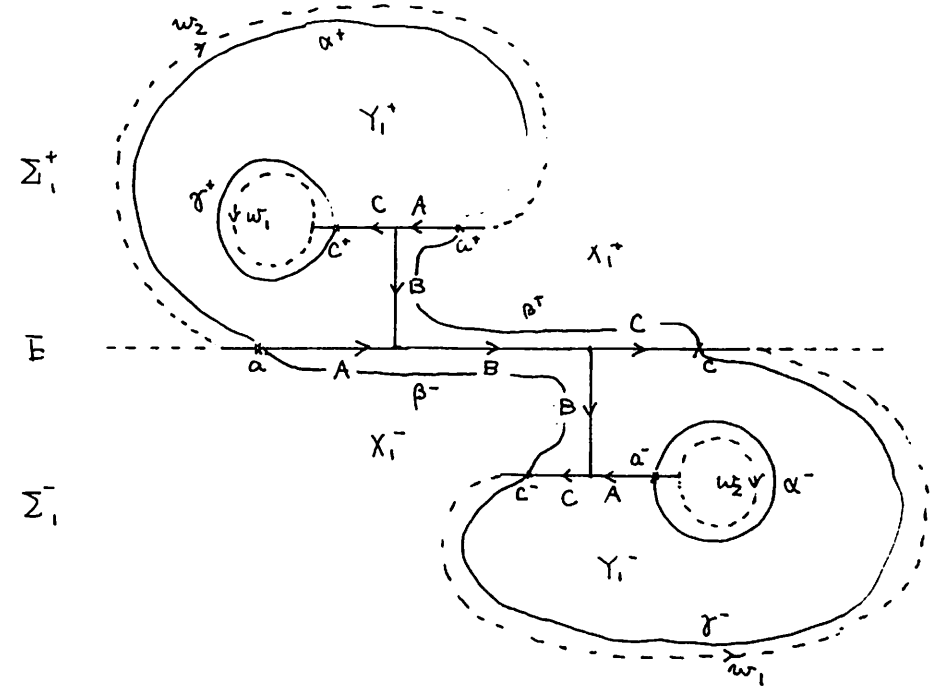
以下では，典型的な例を示して証明の方法を紹介する。

簡単な方，定理2から始める。

lemma 1. $[Y_1] = ACw \Rightarrow X_1^+ \neq Y_1^+$

Proof. $[Y_1] = ACw$ かつ $X_1^+ = Y_1^+$ と仮定すると
$[Y_1] = C^{-1}A^{-1}xAB^2y$ と書けて(in Σ^+)，$A^{-1}xAB^2$ の
部分を Σ^- で描いて見れば $X_1^- \neq Y_1^-$ となって矛盾する。

従って $[Y_1] = ACw$ の時，Δ_1 の問題の場所は次図
の通りとなる。



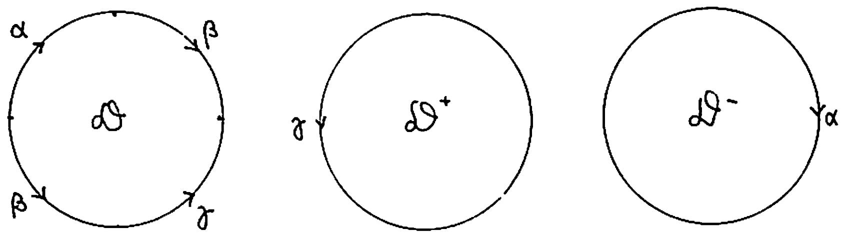
「道具立て」

1. E-cycle 上の edge A, C に点 a, c を採る。
   $f_1^{-1}f_1(a) \cap \Sigma_1^{\pm} = a^{\pm}$, $f_1^{-1}f_1(c) \cap \Sigma_1^{\pm} = c^{\pm}$ とおく。
2. Y_1^+ 内で a から a^+ への w_2 に沿った arc α^+ を採り、
   同様に c^+ から c^+ へ w_1 に沿って circle γ^+ を選ぶ。
   $\alpha^+ \cap \gamma^+ = \phi$, $\alpha^+ \cap G = a \cup a^+$, $\gamma^+ \cap G = c^+$ とする。
   $\alpha^- = f_1^{-1}f_1(\alpha^+) \cap \Sigma^-$, $\gamma^- = f_1^{-1}f_1(\gamma^+) \cap \Sigma^-$ である。
3. X_1^+ で a^+ から c へ ABBC に沿って arc β^+ を採る。
   $\beta^+ \cap G = a^+ \cup c$, $\beta^- = f_1^{-1}f_1(\beta^+)$

これで上図の通り、S^2 上に disjoint な circles, $\delta = \alpha^+ \cup \beta^+ \cup \gamma^- \cup \beta^-$, γ^+, α^- が得られた。S^2 が bound する 3-ball を B^3 とする時、B^3 内で δ, γ^+, α^- が bound する proper 2-balls で disjoint なものを $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^+$ $\mathcal{D}^-$ とおく。

Lemma 2 $\mathcal{D}\cup\mathcal{D}^+\cup\mathcal{D}^-/f_1 = \mathcal{S}$ is a 2-sphere

Proof. $\mathcal{S}$ は次の identification で与えられている.



従って見るからに 2-sphere である。

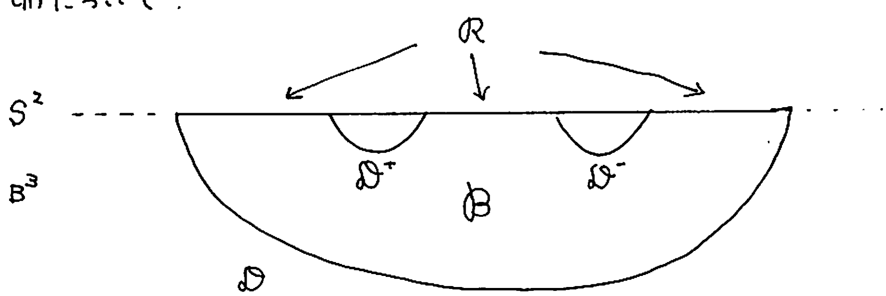
$\delta\cup\gamma^+\cup\alpha^-$ が S^2 上で bound する punctured disk を $\mathcal{R}$ として、$\mathcal{R}\cup\mathcal{D}\cup\mathcal{D}^+\cup\mathcal{D}^-$ が B^3 で bound する 3-ball を $\mathcal{B}$ とおく。

Lemma 3. 3-manifold $M_1=\mathcal{B}/f_1$ は次を満たす。

(i) $\dot{M}_1 = \mathcal{S}$

(ii) $M_1 \searrow \mathcal{R}\cup\mathcal{D}^+\cup\mathcal{D}^-/f_1$ ($= P_1$ とおく)

(ii) について：



だから $\mathcal{D}$ を M_1 の free face として採用すれば、$\mathcal{B}$ が 3-ball であるから自然に P_1 に collapse する。

又, $\mathcal{S}$ が W_1 を disconnect するかどうかと云う点については, $\forall p \in \mathcal{R}$, $f_1^{-1}(p) \subset \mathcal{R}$ だから心配はない。

この $\mathcal{S}$ と M_1 を用いて次が得られる。

Prop. 1. $W_1 = W_1' \# \widetilde{M}_1$ と書ける。但し $\widetilde{M}_1$ は M_1, W_1' は $\overline{B^3 - \mathcal{B}/f_1}$ の boundary に 3-ball を貼り付けた closed 3-manifold である。

以上 Δ_1 について記したが、全く並行に、Δ_2 について

Prop. 2 $W_2 = W_2' \# \widetilde{M}_2$

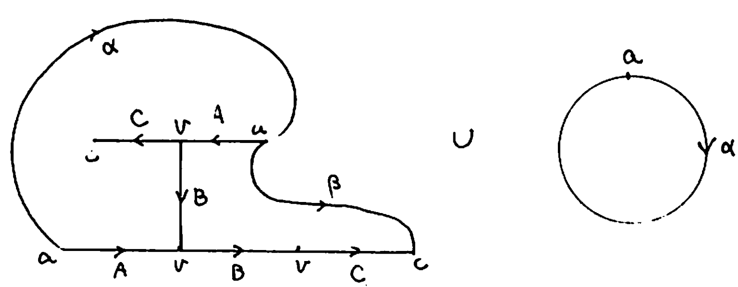
Big Remark! $f_1 | \overline{S^2 - \mathcal{R}} = f_2 | \overline{S^2 - \mathcal{R}}$ として良い。
(K.524, K.563 を参照)

Prop. 3 $W_1' = W_2'$

となって、次は当然 $\widetilde{M}_1$ と $\widetilde{M}_2$ の homeo type を比較する事になる。

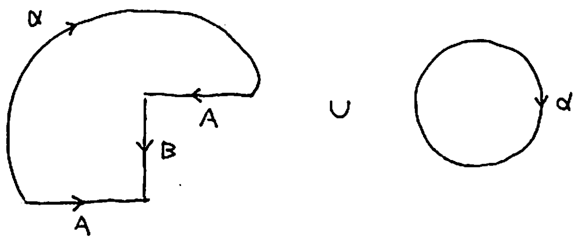
Lemma 4 M_1 is a 3-ball. 即ち $\widetilde{M}_1 = S^3$

Proof. M_1 の spine P_1 は次図で与えられる。



但し A, C は元の A, C を少し縮めたものである。

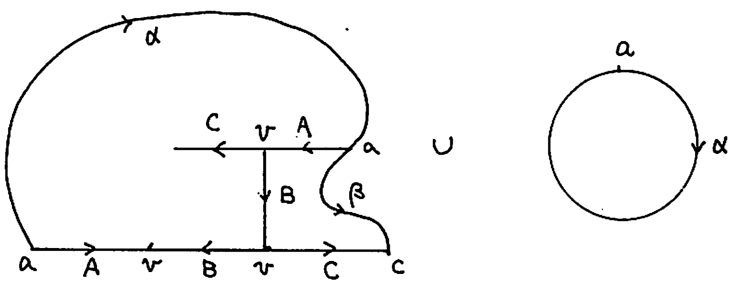
β は P_1 の free face であるから, P_1 は

$Q =$ 

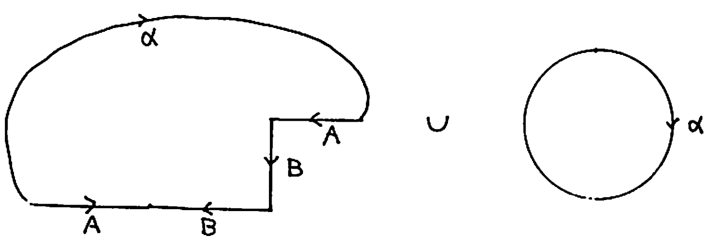
に collapse する。 B を Q の free face と思えば, 明らかに $Q \searrow 0$ となる。 従って M_1 は 3-ball である。

Lemma 5 $\widetilde{M}_2 = P^3$

Proof. M_2 の spine P_2 は次である。



やはり β は P_2 の free face であるから P_2 は

$Q =$ 

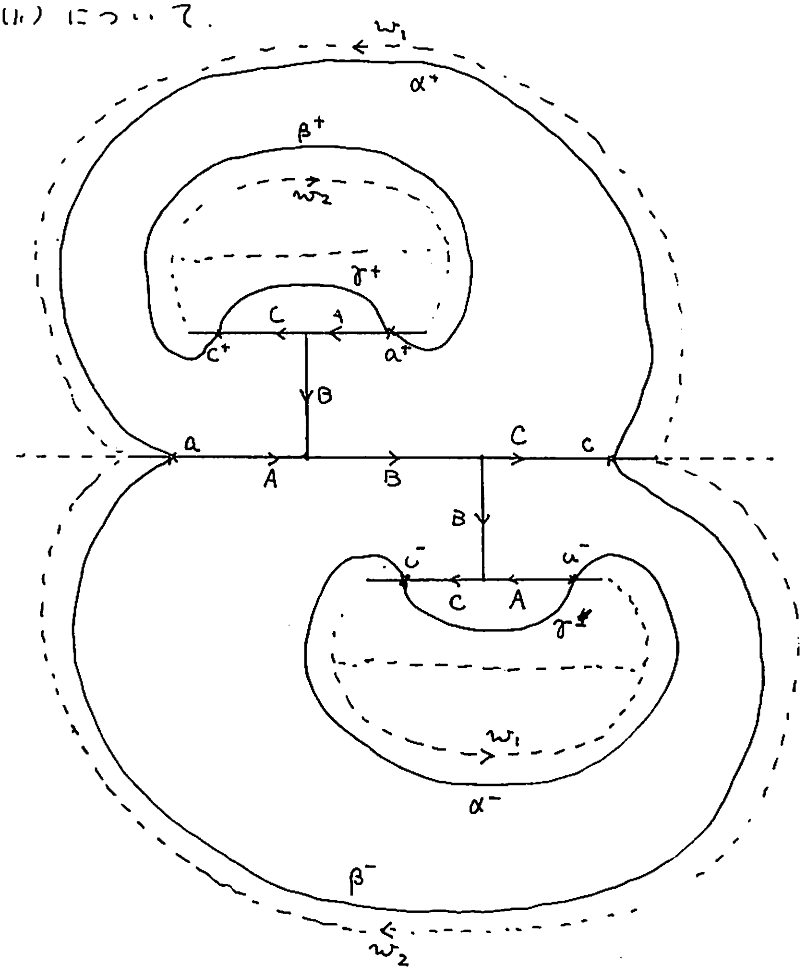
に collapse する。 Q は P^2 であり, $\dot{M}_2 = 2\text{-sphere}$ であるから, $\widetilde{M}_2 = P^3$ となる。

以上で Th.2 (i) の証明が終了

これで種明かしは終ったから後は簡略する。

Th. 2 (ii) について.

Δ_1:



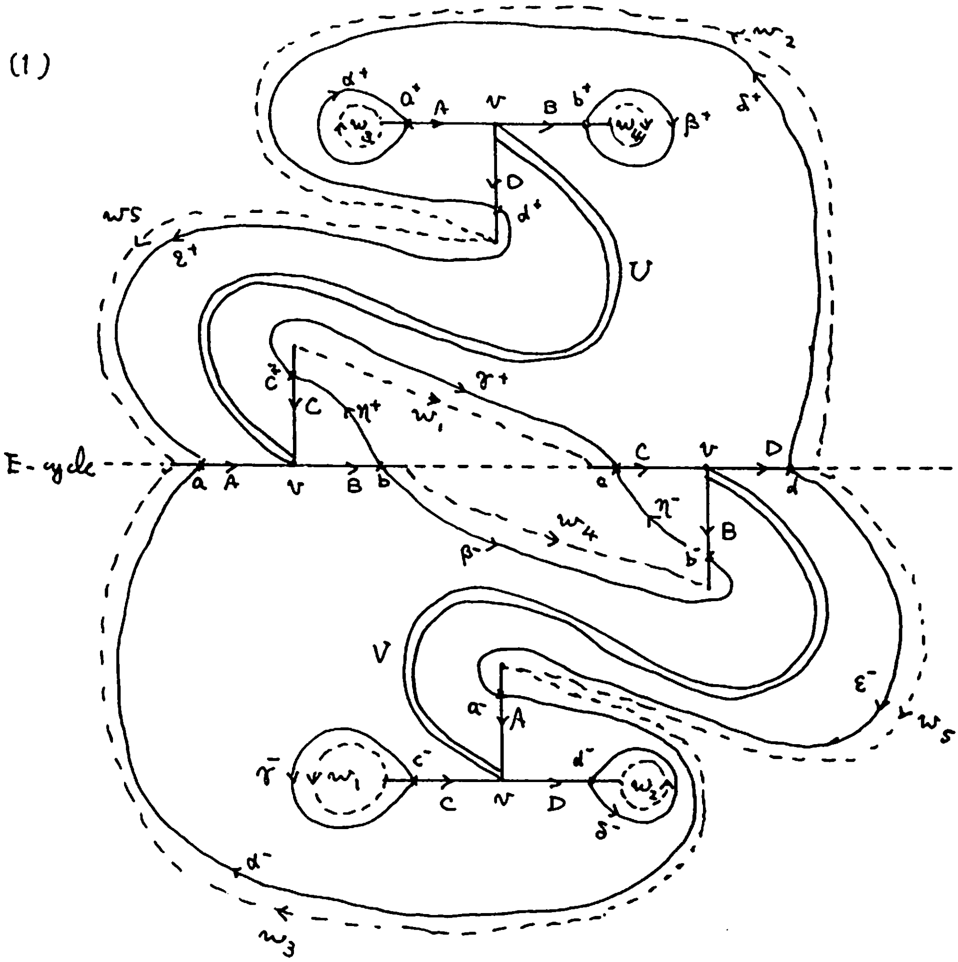
という図になる。ここで γ^- の位置が特定出来るのもDS-diagram の特徴の一つである。

(i) と全く同様に W_1, W_2 は connected sum の形に書けて, M_1, M_2 の spine が "abalone" になっている事から. $\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_2$ は共に S^3. 即ち, $W_1 = W_2$ が得られる。

Th. 2 終了

Th. 3 (ii) について.

(1)



$\Delta_1 \to \Delta_2$ および 道具立は上図の通りとする。

$\delta^+ \cup \varepsilon^+ \cup \alpha^- \cup \varepsilon^-$ が bound する proper disk $\mathcal{D}$

$\gamma^+ \cup \eta^+ \cup \beta^- \cup \eta^-$ $\mathcal{D}_0$

α^+, β^+ $\mathcal{D}_1^+$, $\mathcal{D}_2^+$

γ^-, δ^- $\mathcal{D}_1^-$, $\mathcal{D}_2^-$

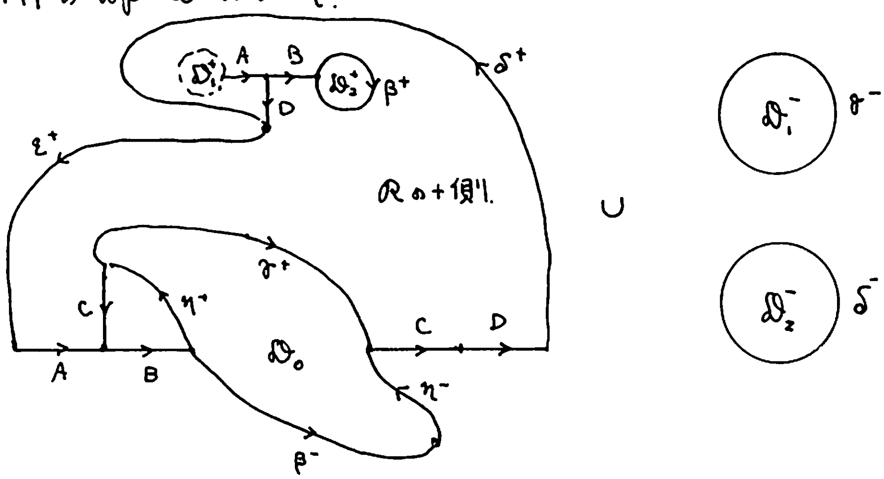
によって Th. 2 と同じ議論を行なう。

Lemma 6. $\mathcal{D}\cup\mathcal{D}_0\cup\mathcal{D}_1^+\cup\mathcal{D}_2^+\cup\mathcal{D}_1^-\cup\mathcal{D}_2^-/f_i = \mathcal{S}$, $i=1,2$.
は2つの2-sphereのunionである。

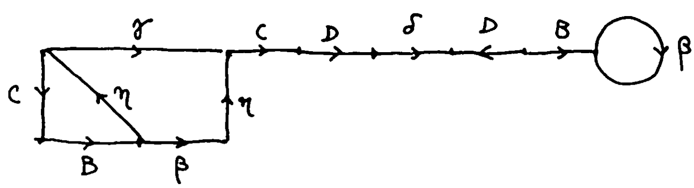
Prop. 4. $W_i = W_i'\cup M_i$, $W_i'\cap M_i = \mathcal{S} = \dot{W}_i' = \dot{M}_i$
ここで $M_i \ni v$ としておく。

Prop. 3 より $W_1' = W_2'$ となっている事に再注意.

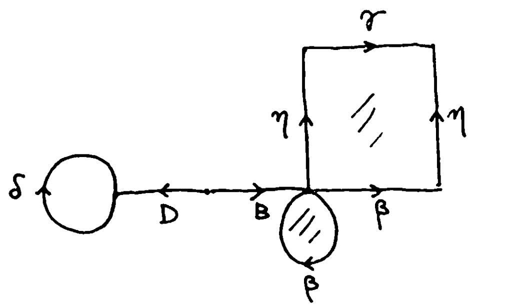
M_1 の spine について.



ε^+ は P_1 の free face になっている。
edge の +, − は identification の指定には不要だから以後省略.

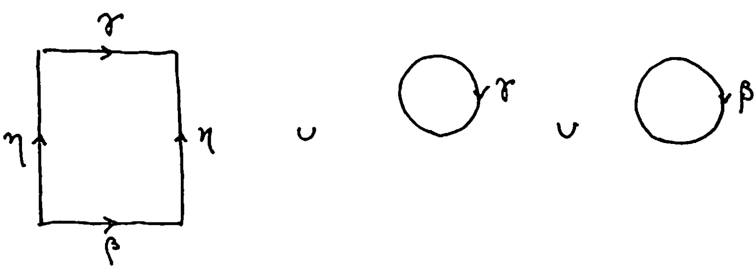


書きなおして free face C から collapse する。



= Q

Q の circle δ に D_2 を貼れば, δ は free face になる。
従って

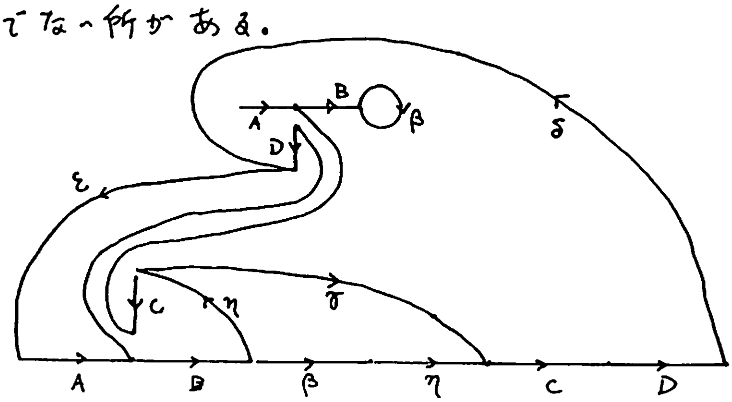


= a 2-sphere

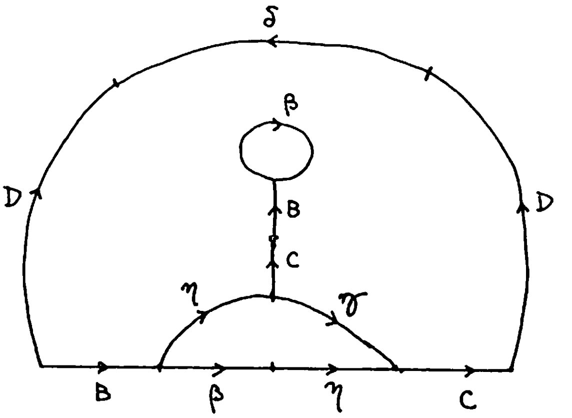
これで, M_1 は 2-sphere を spine として持つ事になった。

Lemma 7. $M_1 = S^2 \times I$

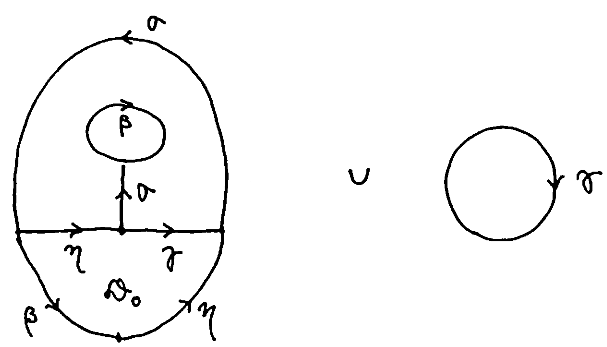
同様に M_2 の spine を次に求めるのであるが, こちらは多少素直でない所がある。



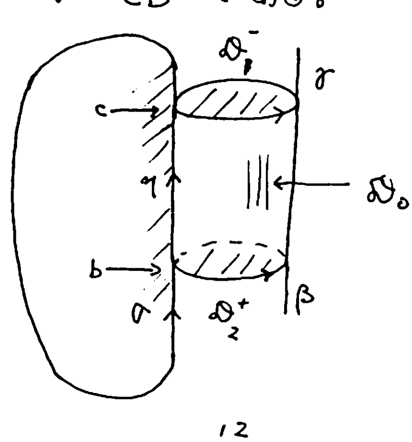
の部分だけ前と異なる。 Σ が free である事は同じ。



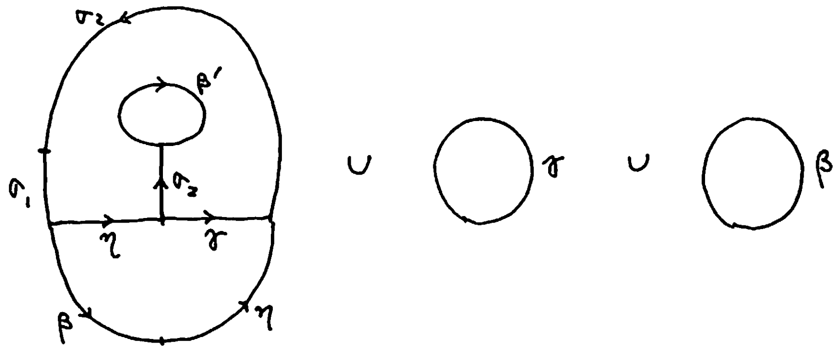
となって，最早 free face はないし，まだ 2-sphere ではない。
δ に $\mathcal{D}_2^-$ を貼り付けて書き直せば



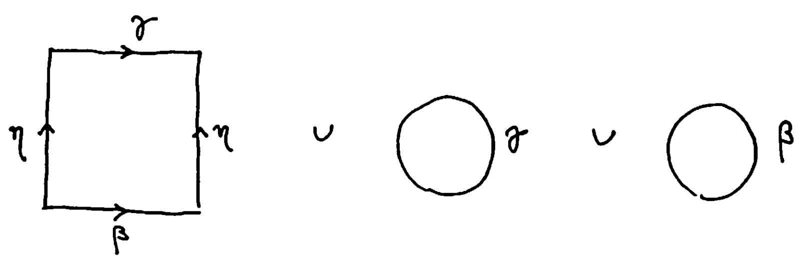
となる，但し $\alpha = CB$ である。



$\mathfrak{D}_2^+$ を用いて，D×I 変形（K.524, K.563, 山下-横山）を行なうと，（σの側で）



となり，σ_1 が free であるから



= a 2-sphere

故に．M_2 は 2-sphere に collapse する。

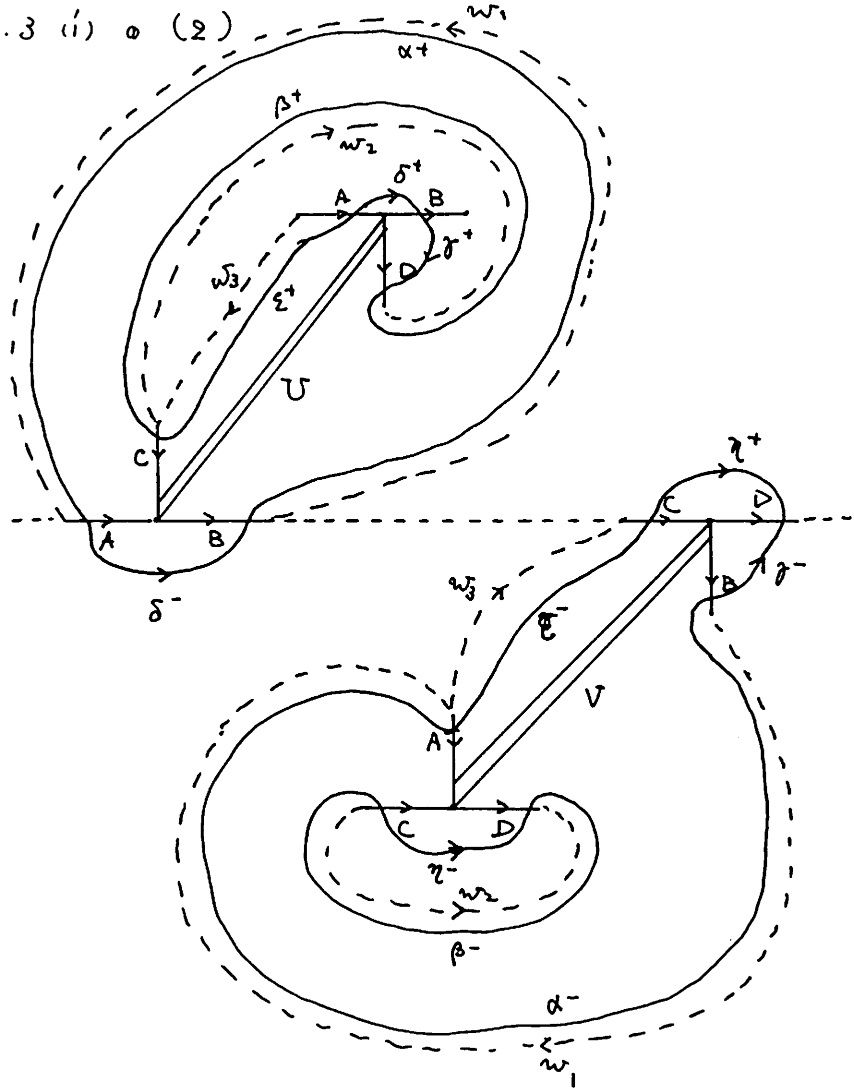
Lemma 8. $M_2 = S^2 \times I$

K.563 の orientability の議論から．

"W_2 は W_1 に homeomorphic である"

が得られる。

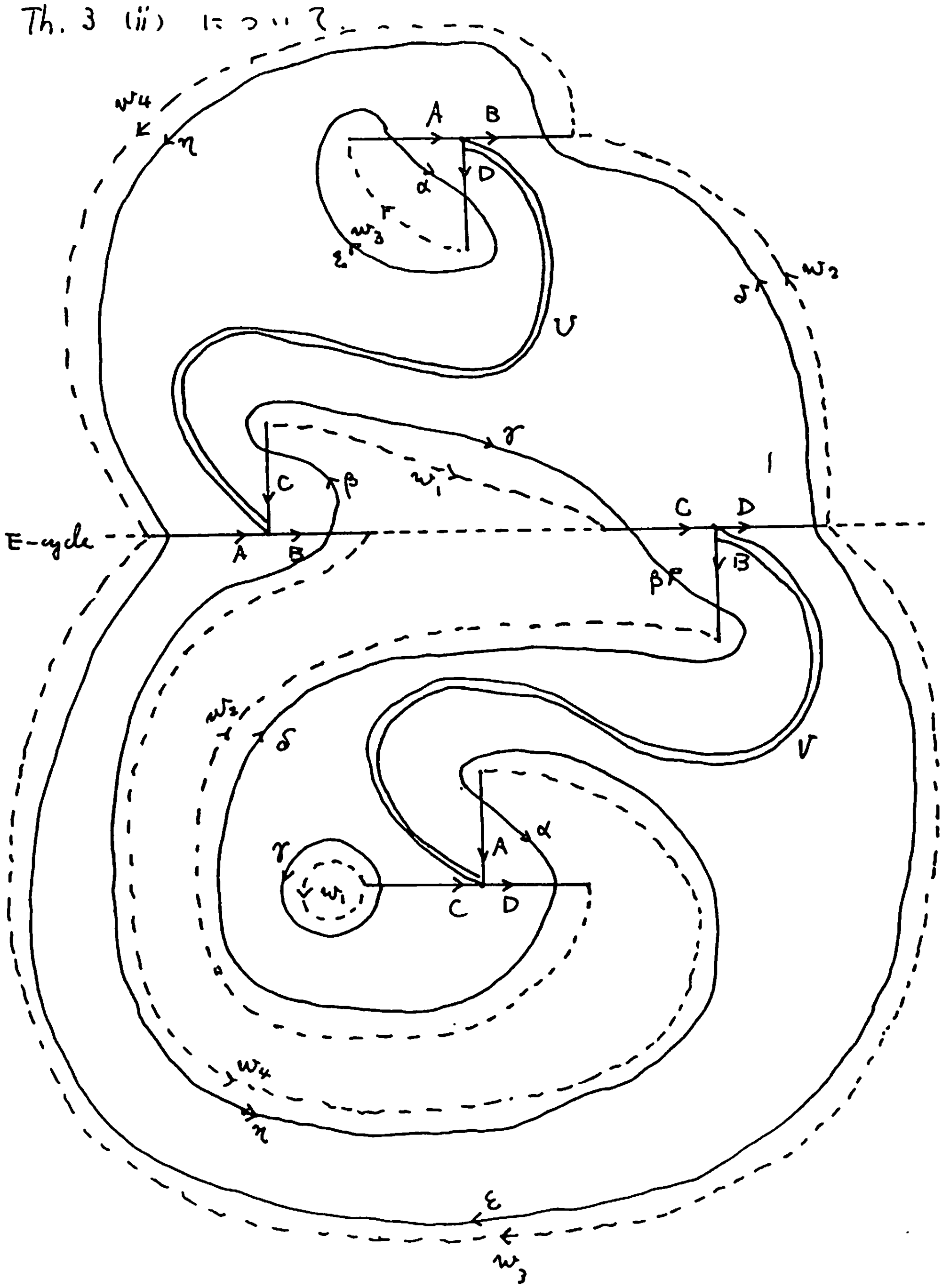
Th. 3 (i) の (2)



この場合, spines $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ は共に collapsible である。

従って $\Delta_1 \longrightarrow \Delta_2$ のこの shift I は homeo type を変えない。

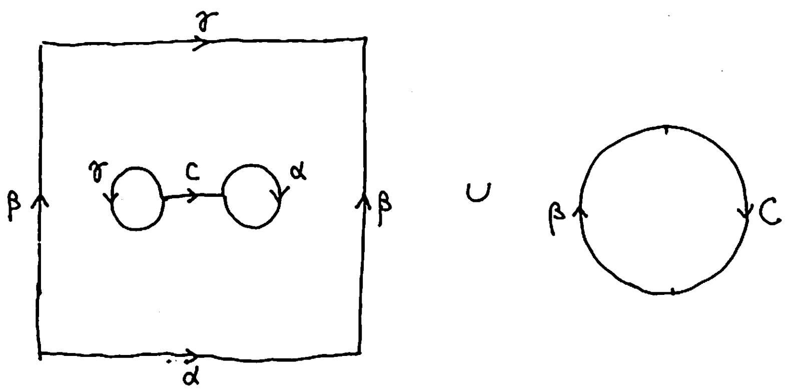
Th. 3 (ii) について



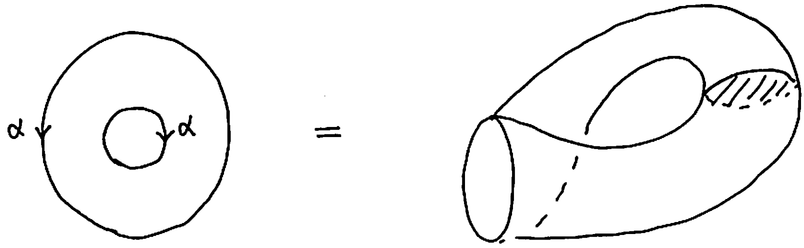
Lemma 9 　 S is a 2-sphere

だから、 $W_i = W \# \tilde{M}_i$ と書ける。

M_1 の spine P_1 について、
　$D\alpha^{-1}A$ を改めて α とし向きは元の α と同じにする。
又、 $B\beta$ を同様に β とおく。



で P_1 が与えられている。
　γ が bound している disk を用いて $D\times I$ 変形を行なうと



になる。

従って

Lemma 10 　 $\tilde{M}_1 = S^1 \times S^2$

M_2 の spine P_2 について，
全く同様に（$D \times I$ 変形を行って）

Lemma 11　$\widetilde{M}_2 = P^3$　（$M_2 \searrow P^2$）

となって Th. 3 を終る。

S. D. G.

「名称変更」
lateral stripe（ヨコシマ），横変形 は如何にも語感が悪いから，それぞれ，clue（= clew），shift に変更します，ご御協力！