

Heegaard diagram に付随した基本群の変換について
(箱根セミナ'93)

堀口 俊二(新潟産業大学)

Contents

§ 1. Heegaard diagram and Cut diagram

§ 2. Heegaard diagram の meridian,longitude-系により表示される基本群の変換

§ 3. DS-diagram and DS-deformation

§ 4. 主定理の証明(§ 2 定理2~6)

§ 5. Examples

§ 1. Heegaard diagram and Cut diagram

定義 1. genus n handlebody U において、互いに disjoint な n 個の proper 2-disks D_1, \dots, D_n を選んで、 $U - (D_1 \cup \dots \cup D_n)$ が連結なとき、各 D_i を U の meridian-disk, $\{D_1, \dots, D_n\}$ 各 D_i は U の proper disk, $D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j\}$ を U の meridian-disk 系, $\{\partial D_1, \dots, \partial D_n\}$ を meridian 系とよぶ。

以下断りのない限り、閉3-多様体 M^3 は連結可付向閉3-多様体を表す。

定義 2. 連結可付向閉3-多様体 M^3 は、 M^3 に含まれる 2つの genus $n(\geq 0)$ handlebodies U, V の和 ; $M^3 = U \cup V$, $U \cap V = \partial U \cap \partial V = F$ (genus n の閉曲面) と表わされる。 $(U, V; F)$ を M^3 の genus n の Heegaard splitting といい、 F を Heegaard surface と呼ぶ。さらに 2つの genus n handlebodies U, V があって、それらの境界 ∂U から ∂V への同相写像 $f: \partial U \rightarrow \partial V$ が与えられたとき、 ∂U の各点 p と $f(p)$ を同一視して連結可付向閉3-多様体 M^3 が得られる。このとき 4つの組 $(M^3; U, V, f)$ を f に関する Heegaard splitting と呼ぶ。

定義 3. $(U, V; F)$ (resp. $(M^3; U, V, f)$) を M^3 の genus n Heegaard splitting とする。 U, V の meridian-disk 系をそれぞれ $\{D_1, \dots, D_n\}$, $\{D'_1, \dots, D'_n\}$ とする。 $(U; \partial D'_1, \dots, \partial D'_n)$ (resp. $(U; f^{-1}(\partial D'_1), \dots, f^{-1}(\partial D'_n))$) あるいは $(V; \partial D_1, \dots, \partial D_n)$

(resp. $(V; f(\partial D_1), \dots, f(\partial D_n))$) を Heegaard splitting $(U, V; F)$ (resp. $(M^3; U, V, f)$) の genus n Heegaard diagram とよぶ. $(U; \partial D'_1, \dots, \partial D'_n)$ (resp. $(U; f^{-1}(\partial D'_1), \dots, f^{-1}(\partial D'_n))$) の $\{\partial D'_1, \dots, \partial D'_n\}$ (resp. $\{f^{-1}(\partial D'_1), \dots, f^{-1}(\partial D'_n)\}$) を longitude 系と呼ぶ.

$(M^3; U, V, f)$ において, $f^{-1}(V)$ を再び V におきかえて, f^{-1} を恒等写像とみなせるから, Heegaard diagram $(U; f^{-1}(\partial D'_1), \dots, f^{-1}(\partial D'_n))$ の $\{f^{-1}(\partial D'_1), \dots, f^{-1}(\partial D'_n)\}$ は V の meridian 系と考えてよい.

$(U; \partial D'_1, \dots, \partial D'_n), (V; \partial D_1, \dots, \partial D_n)$ を M^3 の $(U, V; F)$ の Heegaard diagrams とする. 今後 $(\partial D'_1 \cup \dots \cup \partial D'_n) \cap (\partial D_1 \cup \dots \cup \partial D_n)$ は一般の位置の議論により有限個の点より成るものとする.

定義4. genus n Heegaard diagram $(U; \partial D'_1, \dots, \partial D'_n)$ において,

$$\{D_1 \cup \dots \cup D_n\} \cap \{D'_1 \cup \dots \cup D'_n\} = \{\partial D_1 \cup \dots \cup \partial D_n\} \cap \{\partial D'_1 \cup \dots \cup \partial D'_n\}$$

は, points であるが, この points の数を Heegaard diagram の交点数とよぶ.

$(U; \partial D'_1, \dots, \partial D'_n), (V; \partial D_1, \dots, \partial D_n)$ を M^3 の $(U, V; F)$ の Heegaard diagrams とする. $\partial D'_i = l_i, \partial D_i = m_i$ ($i = 1, \dots, n$) は向き付けられているとする. 互いに交わらない ∂U の 1-球面 $\{\partial D_1, \dots, \partial D_n\}$ は ∂U の各 1-球面 ∂D_i を edges に分解する. $\partial D'_i$ にあるこれらの edges に $\partial D'_i$ の向きに従って $\partial D'_i = l_i = l_{i1} \cup l_{i2} \cup \dots \cup l_{ik}$ となるように labels $l_{i1}, l_{i2}, \dots, l_{ik}$ をこれらの順に付ける (最初の l_{i1} は $\partial D'_i$ の edges から任意に選ばれる). 各 l_{ij} は $\partial D'_i$ と同じ向きをもつとする. 反対に, 互いに交わらない ∂U の 1-球面 $\{\partial D'_1, \dots, \partial D'_n\}$ は ∂U の各 1-球面 $\partial D'_i$ を edges に分解する. $\partial D'_i$ にあるこれらの edges に $\partial D'_i$ の向きに従って $\partial D'_i = m_i = m_{j1} \cup m_{j2} \cup \dots \cup m_{jj}$ となるように labels $m_{j1}, m_{j2}, \dots, m_{jj}$ をこれらの順に付ける. 各 m_{ji} は $\partial D'_i$ と同じ向きをもつとする. U を meridian disks D_j ($j = 1, \dots, n$)で切ると, 3-ball Bu^3 を得る. ∂Bu^3 は 2-球面 Su^2 であるが, Su^2 には U を D_j ($j = 1, \dots, n$)で切ってできる切断面の n 個の対の disks $\{D_{ji}^+, D_{ji}^-\}$ ($j = 1, \dots, n$)がある. ∂D_{ji}^+ と ∂D_{ji}^- は $\partial D'_i$ の同じ edges によって分割されるから, それらは向き付けられた同じ labels $m_{j1}, m_{j2}, \dots, m_{jj}$ を持つ. それ故 2-球面 Su^2 上には $\partial D_{ji}^+ = m_j = m_{j1} \cup m_{j2} \cup \dots \cup m_{jj}, \partial D_{ji}^- = m_j = m_{j1} \cup m_{j2} \cup \dots \cup m_{jj}, \partial D'_i = l_i = l_{i1} \cup l_{i2} \cup \dots \cup l_{ik}$ ($i, j = 1, \dots, n$)となるような向き付けられた, label を付けられた edges からなる 3-regular

graph がある。

定義 5. 2-球面 S^2 にある 3-regular graph

$$\{\partial D_i' = l_i = l_{i1} \cup \dots \cup l_{ik}, \partial D_j^+ = m_j = m_{j1} \cup \dots \cup m_{jj}, \partial D_j^- = m_j = m_{j1} \cup \dots \cup m_{ji}\}$$

($i, j = 1, \dots, n$) (ただし, k, l は i, j により一般に異なる)

は $(U; \partial D_1', \dots, \partial D_n')$ の Cut diagram と呼ばれ $G(m, l)$ と記述される。同様に $(V; \partial D_1, \dots, \partial D_n)$ の cut diagram $G(l, m)$ が定義され

$$G(l, m) = \{\partial D_j = m_j = m_{j1} \cup \dots \cup m_{ji},$$

$$\partial D_j^+ = l_j = l_{j1} \cup \dots \cup l_{jk}, \partial D_j^- = l_j = l_{j1} \cup \dots \cup l_{jk}\} (i, j = 1, \dots, n)$$

と表示される。 $G(m, l) \cup G(l, m)$ は Heegaard diagrams $(U; \partial D_1', \dots, \partial D_n')$ と $(V; \partial D_1, \dots, \partial D_n)$ の cut diagrams の対と呼ばれる。

$G(m, l)$ または $G(l, m)$ を Heegaard diagram と呼ぶこともある。

例 1. 図1は 3-球面 S^3 の genus 2 Heegaard diagrams $(U; l_1, l_2), (V; m_1, m_2)$ およびそれらの cut diagram $G(m, l), G(l, m)$ である。

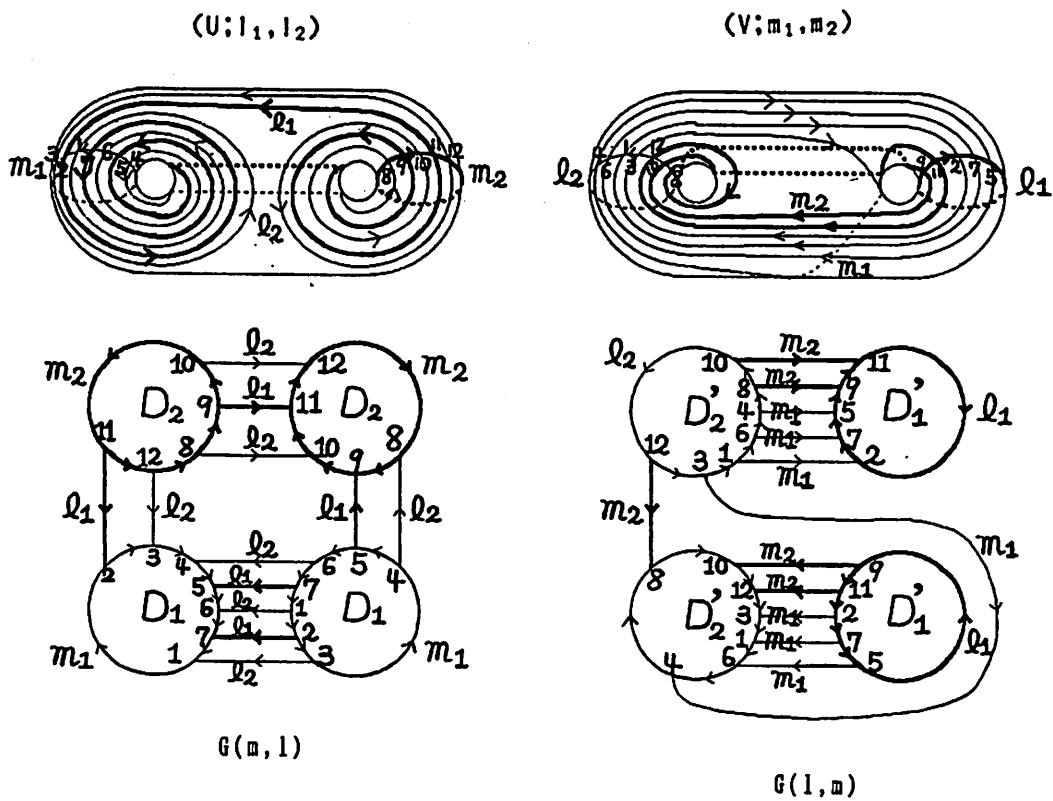


図1

$G(m, l) \cup G(l, m)$ の vertex, edge に付けられた label を数えることにより、次の命題を得る。

命題 1. $G(m, l) \cup G(l, m)$ には、一つの vertex に付けられた label が四つあり、一つの edge に付けられた label が三つある。

§ 2. Heegaard diagram の meridian, longitude-系により表示される基本群の変換

$(U, V; F)$ の Heegaard diagrams を $(U; l_1, \dots, l_n)$, $(V; m_1, \dots, m_n)$ とする。meridian 系, longitude 系は向き付けられているとする。 $(U; l_1, \dots, l_n)$ において、 l_i 上のある点から l_j の向きに従って出発して m_j と交差するとき、 l_j が m_j を上から下に横切るときは、 m_j と読み、逆に l_j が m_j を下から上に横切るときは m_j^{-1} と読んで行って出発点まで戻ったとき、これらの順序の読みの語を \hat{m}_j と表す。

定理 1. $\pi_1(M^3)$ は m_1, \dots, m_n を生成元、 $\hat{m}_1 = 1, \dots, \hat{m}_n = 1$ を関係式として

$$\pi_1(M^3) = \langle m_1, \dots, m_n \mid \hat{m}_1 = 1, \dots, \hat{m}_n = 1 \rangle \quad \dots (m)$$

と表示される。逆に $(V; \partial D_1, \dots, \partial D_n) = (V; m_1, \dots, m_n)$ からも V の meridian 系 $\{l_1, \dots, l_n\}$ を longitude 系 $\{m_1, \dots, m_n\}$ の走り方から読んでいって次の基本群の表示が得られる。

$$\pi_1(M^3) = \langle l_1, \dots, l_n \mid \hat{l}_1 = 1, \dots, \hat{l}_n = 1 \rangle \quad \dots (1)$$

$G(m, l)$ (resp. $G(l, m)$) では、meridian m_i (resp. l_i) ($i = 1, \dots, n$) が二つ存在するから、この内のどちらか一方を指定しておけば、基本群の表示 (m) (resp. (1)) を得ることができる。本稿では、指定した meridian m_i (resp. l_i) に向かって l_i (resp. m_i) が入るとき、 m_i^{-1} (resp. l_i^{-1}) と読み、逆に m_i (resp. l_i) から l_i (resp. m_i) が出て行くとき m_i (resp. l_i) と読むことにする。

例 2. 例 1 の $(U; m, l)$ あるいは $G(m, l)$ から得られる基本群は

$$\pi_1(S^3) = \langle m_1, m_2 \mid m_2 m_2 m_1^{-1} m_1^{-1} m_1^{-1} = 1, m_2 m_2 m_2 m_1^{-1} m_1^{-1} m_1^{-1} m_1^{-1} = 1 \rangle$$

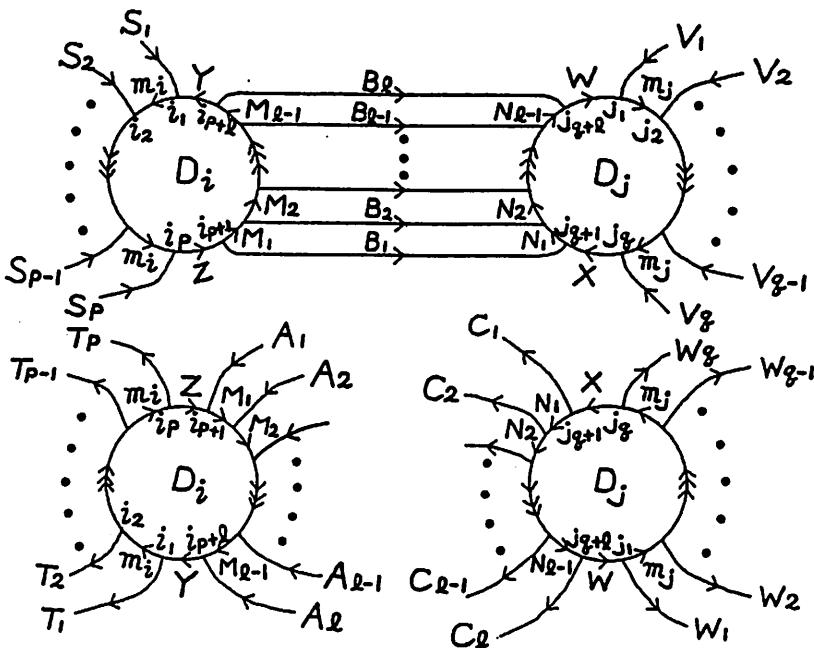
となる。 $(V; l, m)$ あるいは $G(l, m)$ から得られる基本群は

$$\pi_1(S^3) = \langle l_1, l_2 \mid l_2 l_1^{-1} l_2 l_2 l_1^{-1} l_2 l_1^{-1} = 1, l_2 l_1^{-1} l_2 l_1^{-1} l_2 = 1 \rangle$$

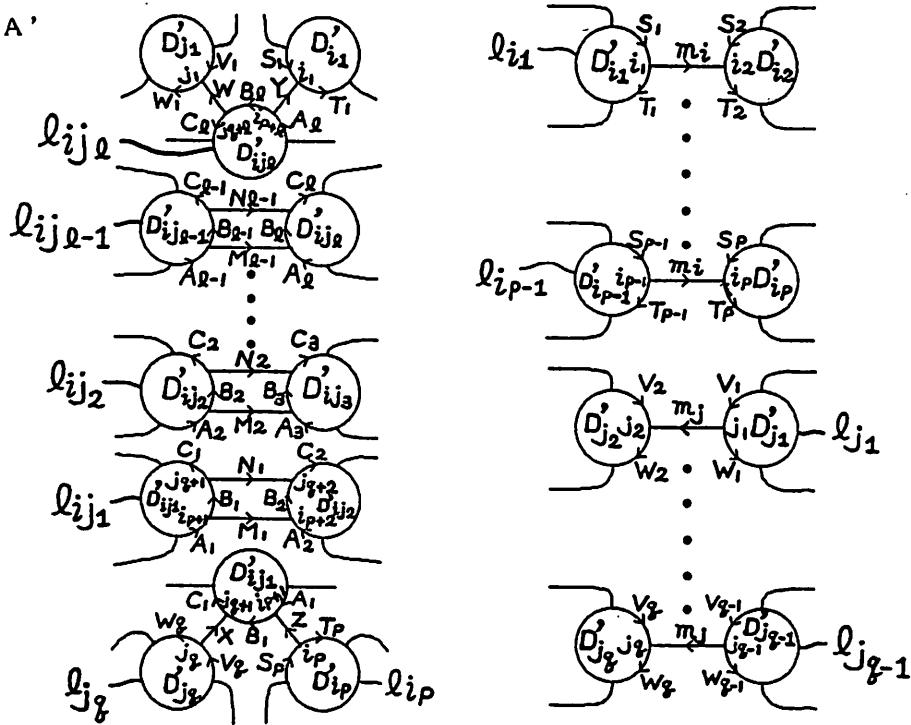
となる。

1. 1-A の meridian disks D_i, D_j の境界 $\partial D_i, \partial D_j$ の meridians をそれぞれ m_i, m_j とする。1-A' の meridian disks $D_{i,k}' (k=1, \dots, p), D_{j,k}' (k=1, \dots, q), D_{i,j,k}' (k=1, \dots, l)$ の境界 $\partial D_{i,k}', \partial D_{j,k}', \partial D_{i,j,k}'$ の meridians をそれぞれ l_{ik}, l_{jk}, l_{ijk} とする。1-A' から得られる基本群の表示を(1A')とする。

1-A



1-A'



(106)

$$\pi_1(1 - A') = \left\{ \begin{array}{ll} l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_p} & l_{i_1} l_{i_2} \cdots l_{i_p} \underline{l_{i_{p+1}} l_{i_{p+2}} \cdots l_{i_{p+1}}} = 1 \cdots \textcircled{1} \\ l_{j_1}, l_{j_2}, \dots, l_{j_q} & l_{j_1} l_{j_2} \cdots l_{j_q} \underline{l_{j_{q+1}} l_{j_{q+2}} \cdots l_{j_{q+1}}} = 1 \cdots \textcircled{2} \\ l_{i,j_1}, l_{i,j_2}, \dots, l_{i,j_j} & r_{\alpha'} = 1 (\text{上記以外の関係式}) \\ l_k (k \neq i, j, ij) & \end{array} \right\} \quad (1A')$$

定理2. 基本群の表示(1A')において、①より得られる $l_{i,j_1} \cdots l_{i,j_j} = l_{i,p}^{-1} \cdots l_{i,1}^{-1}$ を②の $l_{j,j_1} \cdots l_{j,j_j}$ に代入して得られる基本群

$$\left\{ \begin{array}{ll} l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_p} & l_{i_1} l_{i_2} \cdots l_{i_p} \underline{l_{i_{p+1}} l_{i_{p+2}} \cdots l_{i_{p+1}}} = 1 \cdots \textcircled{1} \\ l_{j_1}, l_{j_2}, \dots, l_{j_q} & l_{j_1} l_{j_2} \cdots l_{j_q} \underline{l_{j_{q+1}}^{-1} l_{j_{q+2}}^{-1} \cdots l_{j_{q+1}}^{-1}} = 1 \cdots \textcircled{2} \\ l_{i,j_1}, l_{i,j_2}, \dots, l_{i,j_j} & r_{\alpha} = 1 (\text{上記以外の関係式}) \\ l_k (k \neq i, j, ij) & \end{array} \right\} \quad (1B1')$$

に対応する Heegaard diagram の変換が存在する。また②より得られる $l_{i,j_1} \cdots l_{i,j_j} = l_{j,q}^{-1} \cdots l_{j,1}^{-1}$ を①に代入して得られる基本群

$$\left\{ \begin{array}{ll} l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_p} & l_{i_1} l_{i_2} \cdots l_{i_p} \underline{l_{i_{q+1}}^{-1} l_{i_{q+2}}^{-1} \cdots l_{i_{q+1}}^{-1}} = 1 \cdots \textcircled{1} \\ l_{j_1}, l_{j_2}, \dots, l_{j_q} & l_{j_1} l_{j_2} \cdots l_{j_q} \underline{l_{j_{q+1}} l_{j_{q+2}} \cdots l_{j_{q+1}}} = 1 \cdots \textcircled{2} \\ l_{i,j_1}, l_{i,j_2}, \dots, l_{i,j_j} & r_{\alpha} = 1 (\text{上記以外の関係式}) \\ l_k (k \neq i, j, ij) & \end{array} \right\} \quad (1B2')$$

に対応する Heegaard diagram の変換が存在する。

注意. $(1 - A) \cup (1 - A')$ において、meridian m_i の向きを正に取り、 m_j の向きと同じくすると、 $1 - A'$ での m_i, m_j からの読みは

$$l_{i_1} l_{i_2} \cdots l_{i_p} \underline{l_{i_{p+1}} l_{i_{p+2}} \cdots l_{i_{p+1}}} = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$\underline{l_{i_{q+1}}^{-1} \cdots l_{i_{q+2}}^{-1} l_{i_{q+1}}^{-1} l_{j_q}^{-1} \cdots l_{j_2}^{-1} l_{j_1}^{-1}} = 1 \cdots \textcircled{2}$$

となる。この場合、①より $l_{i,j_1}^{-1} \cdots l_{i,j_2}^{-1} l_{i,j_1}^{-1} = l_{i_1} l_{i_2} \cdots l_{i_p}$ を得るが、これを②に代入すると $l_{i_1} l_{i_2} \cdots l_{i_p} l_{j_q}^{-1} \cdots l_{j_2}^{-1} l_{j_1}^{-1} = 1$ を得る。このような基本群の変換に対応する Heegaard diagram の変換も存在する。

(107)

定理 3. 基本群の表示 $(1A')$ において、 $(1A')$ に新しい生成元 l_A ,

関係式 $l_{IJ_1} \cdots l_{IJ_l} l_A^{-1} = 1$ を追加して得られる基本群

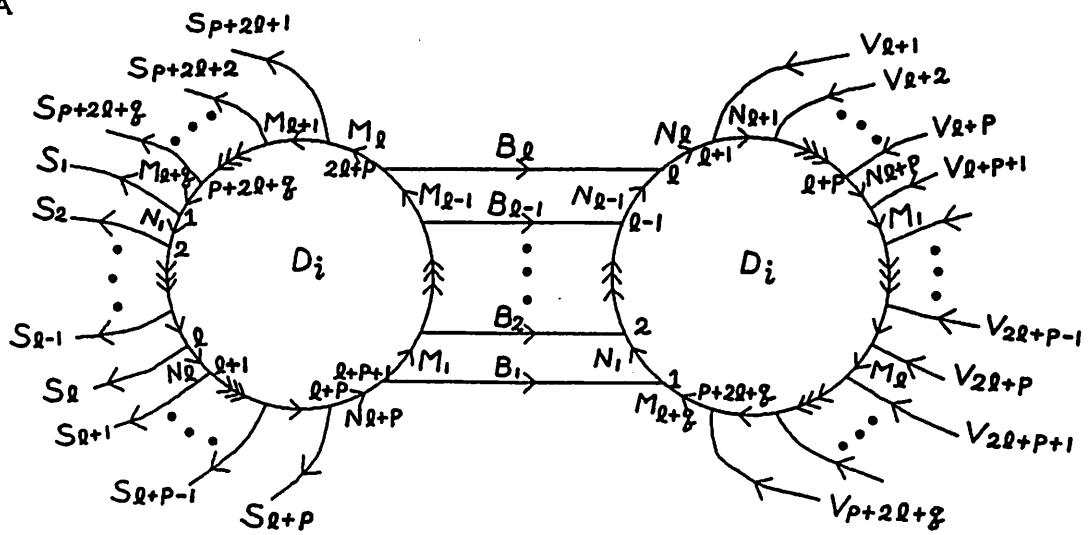
$l_{I_1}, l_{I_2}, \dots, l_{I_p}$	$l_{I_1} l_{I_2} \cdots l_{I_p} l_A = 1 \cdots ①$	(1B3')
$l_{J_1}, l_{J_2}, \dots, l_{J_q}$	$l_{J_1} l_{J_2} \cdots l_{J_q} l_A = 1 \cdots ②$	
$l_{IJ_1}, l_{IJ_2}, \dots, l_{IJ_l}$	$l_{IJ_1} \cdots l_{IJ_l} l_A^{-1} = 1 \cdots ③$	
l_A	$r_A = 1$ (上記以外の関係式)	
l_k (上記以外の 生成元)		

に対応する Heegaard diagram の変換が存在する。

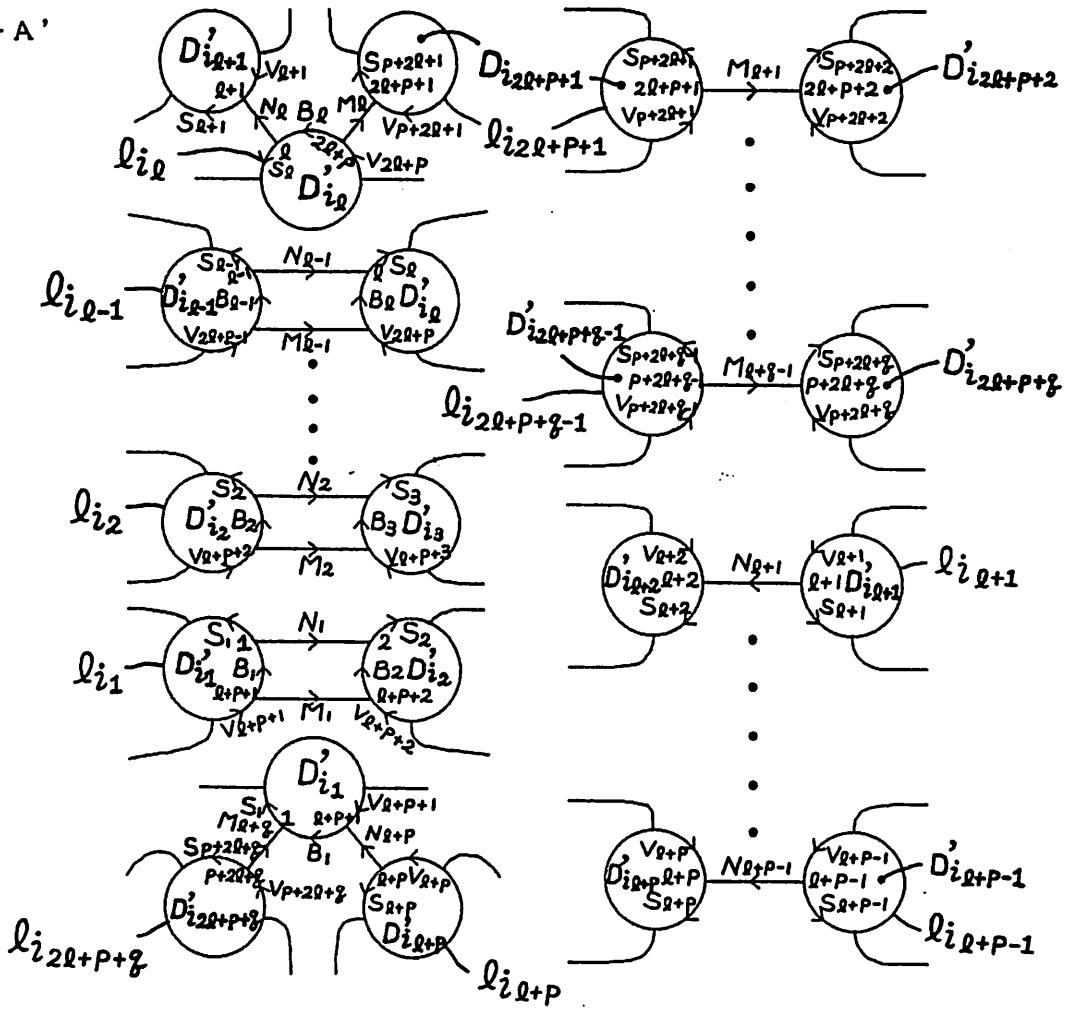
2. $2-A$ の meridian disk D_I の境界 ∂D_I の meridian を m_I とする。 $2-A'$ の meridian disk D_{Ik}' ($k=1, \dots, l+p, 2l+p+1, \dots, 2l+p+q$) の境界 $\partial D_{Ik}'$ の meridian を l_{Ik} とする。 $2-A'$ から得られる基本群の表示を $(2A')$ とする。

(108)

2 - A



2 - A'



(109)

$$\pi_1(2-A') = \left\{ \begin{array}{l} l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1l} \\ l_{1l+1}, \dots, l_{1l+r} \\ l_{12l+r+1}, \dots, l_{12l+r+s} \\ l_k (\text{上記以外の生成元}) \end{array} \middle| \begin{array}{l} l_{11}l_{12} \cdots l_{1l}l_{1l+1} \cdots l_{1l+r} \cdot \\ l_{11}l_{12} \cdots l_{1l} \cdot \\ l_{12l+r+1} \cdots l_{12l+r+s} = 1 \cdots \textcircled{1} \\ r_{d'} = 1 (\text{上記以外の関係式}) \end{array} \right\} (2A')$$

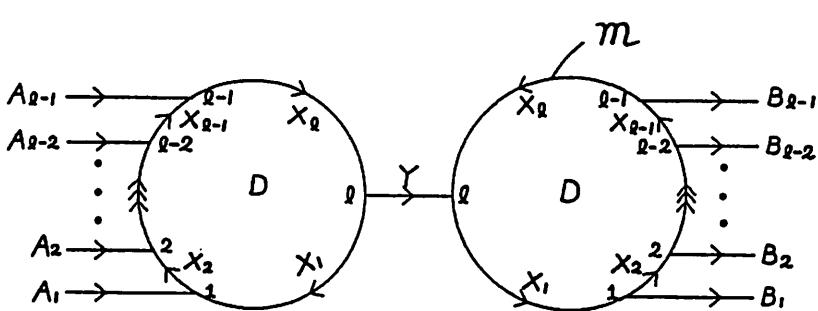
定理4. 基本群の表示(2A')において、新しい生成元 l_A 、関係式 $l_{11}l_{12} \cdots l_{1l}l_A^{-1} = 1$ を追加して得られる基本群

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1l} \\ l_{1l+1}, \dots, l_{1l+r} \\ l_{12l+r+1}, \dots, l_{12l+r+s} \\ l_A \\ l_k (\text{上記以外の生成元}) \end{array} \middle| \begin{array}{l} l_{11}l_{12} \cdots l_{1l}l_A^{-1} = 1 \cdots \textcircled{1} \\ l_{1l+1} \cdots l_{1l+r}l_A \cdot \\ l_{12l+r+1} \cdots l_{12l+r+s}l_A = 1 \cdots \textcircled{2} \\ r_{d'} = 1 (\text{上記以外の関係式}) \end{array} \right\} (2B')$$

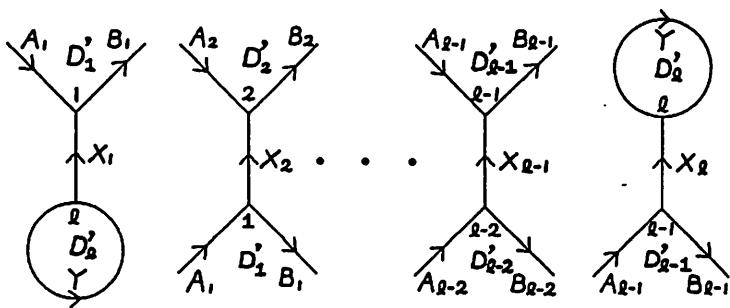
に対応する Heegaard diagram の変換が存在する。

3. 3-A の meridian disk D の境界 ∂D の meridian を m とする。3-A' の meridian disk D'_k ($k=1, \dots, l-1$) の境界 $\partial D'_k$ の meridian を l_k とし、 D'_l の境界 $\partial D'_l$ の meridian を Y とする。3-A から得られる基本群の表示を(3A)とする。

3 - A



3 - A'



(110)

$$\pi_1(3 - A) = \left\langle \begin{array}{c|c} m & w_1 = 1, w_2 = 1, \dots, w_{j-1} = 1 \\ m_k (m \text{ 以外の} \\ \text{生成元}) & m^{-1} = 1 \\ & r_\alpha = 1 (\text{上記以外の関係式}) \end{array} \right\rangle \quad (3A)$$

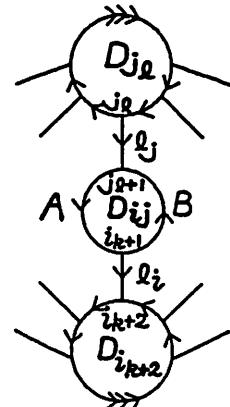
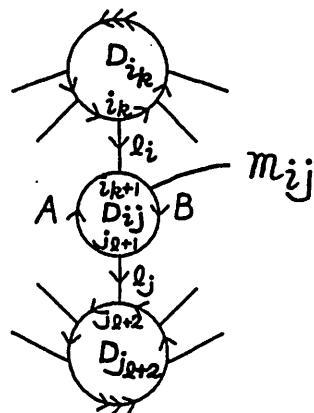
定理5. 基本群の表示(3A)において, $m=1$ を m を含む他の関係式に代入して得られる基本群

$$\left\langle m_k \mid \begin{array}{l} w_1 = 1, w_2 = 1, \dots, w_{j-1} = 1 \\ r_\alpha = 1 (\text{上記以外の関係式}) \end{array} \right\rangle \quad (3B)$$

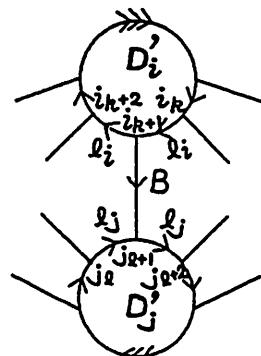
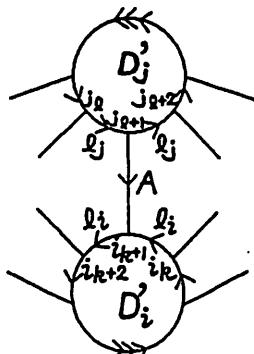
に対応する Heegaard diagram の変換が存在する.

4. $4-A$ の meridian disk $D_{i,j}$ の meridian を $m_{i,j}$ とする. $4-A'$ の meridian disk D'_i, D'_j の meridian を それぞれ l_i, l_j とする. $4-A$ から得られる基本群の表示を(4A)とする.

4 - A



4 - A'



(111)

$$\pi_1(4-A) = \left\langle \begin{array}{c|c} m_{ij} & w_i w_j^{-1} = 1 (w_i: \text{語}) \\ m_k (k \neq ij) & w_j w_{ij} = 1 (w_j: \text{語}) \\ \end{array} \right\rangle \quad (4A)$$

r_α = 1 (上記以外の関係式)

定理 6. 基本群の表示 (4A) から (4B) の変換に対応する Heegaard diagram の変換が存在する。

$$\left\langle \begin{array}{c|c} m_k & w_i w_j = 1 \\ \end{array} \right\rangle \quad (4B)$$

r_α = 1 (上記以外の関係式)

§ 3. DS-diagram and DS-deformation

定義 6. S^2 上の connected 3-regular graph を $G = (V:E)$ とする。V は G の vertices の集合であり、E は G の edges の集合である。 $S^2 - |G|$ の closure を元とする集合を F とする。 $K = V \cup E \cup F$ とする。K が次の条件を満たすとする：

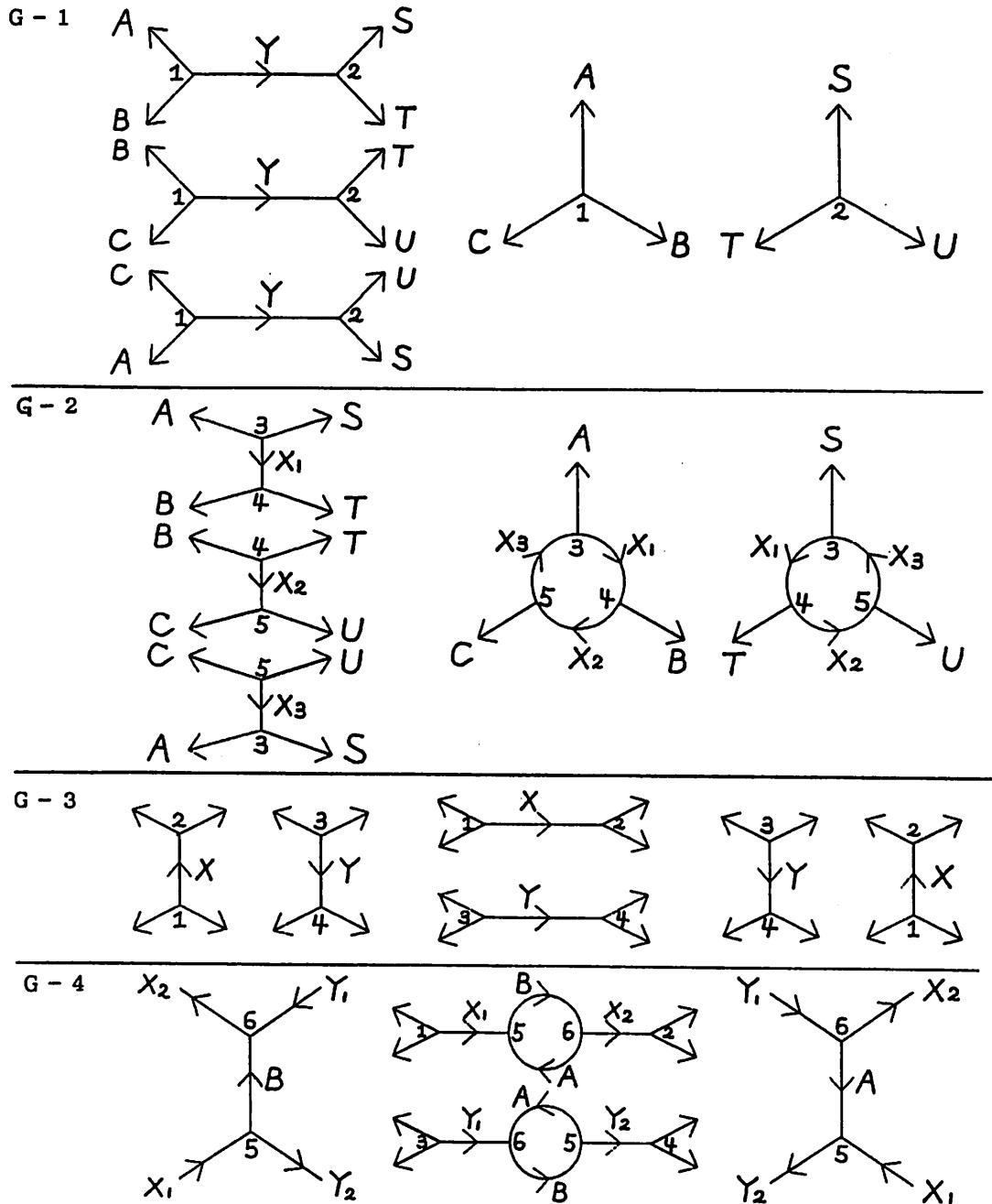
- (1) 各 vertex, edge, 2-disk について、同じ label が付いている 2-disks が二つずつある。同じ label が付いている edges が三つずつある。同じ label が付いている vertices が四つずつある。
- (2) 同じ label が付けられた 2-disks $\tau_{i'}$ と $\tau_{i''}$ の向きは反対。 $\tau_{i'}$ と $\tau_{i''}$ の貼合せと、 $\partial \tau_{i'}$ と $\partial \tau_{i''}$ 上の vertices, edges どうしの貼合せは、labels および各 edges の向きも含めて compatible 同じ label のついた vertices, edges, 2-disks を同一視する写像を f とする。このとき (G, f) を DS-diagram と呼ぶ。

定理 7. 任意の連結可付向閉 3-多様体は、DS-diagram で表現できる。

定義 7. DS-diagram (G, f) において、

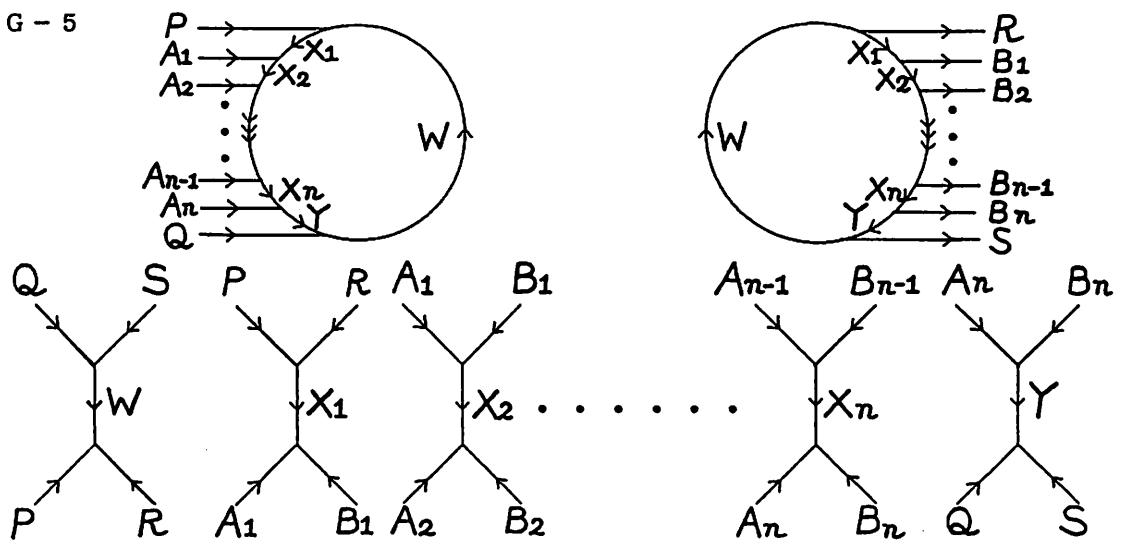
- (1) $(G-1) \Rightarrow (G-2)$ を D_3^+ -変形、 $(G-2) \Rightarrow (G-1)$ を D_3^- -変形 と呼び、この二つを総称して D_3 -変形 と呼ぶ。
 - (2) $(G-3) \Rightarrow (G-4)$ を D_2^+ -変形、 $(G-4) \Rightarrow (G-3)$ を D_2^- -変形 と呼び、この二つを総称して D_2 -変形 と呼ぶ。
- D_2 -変形と D_3 -変形を総称して 初等 DS-変形 という。

(1/2)

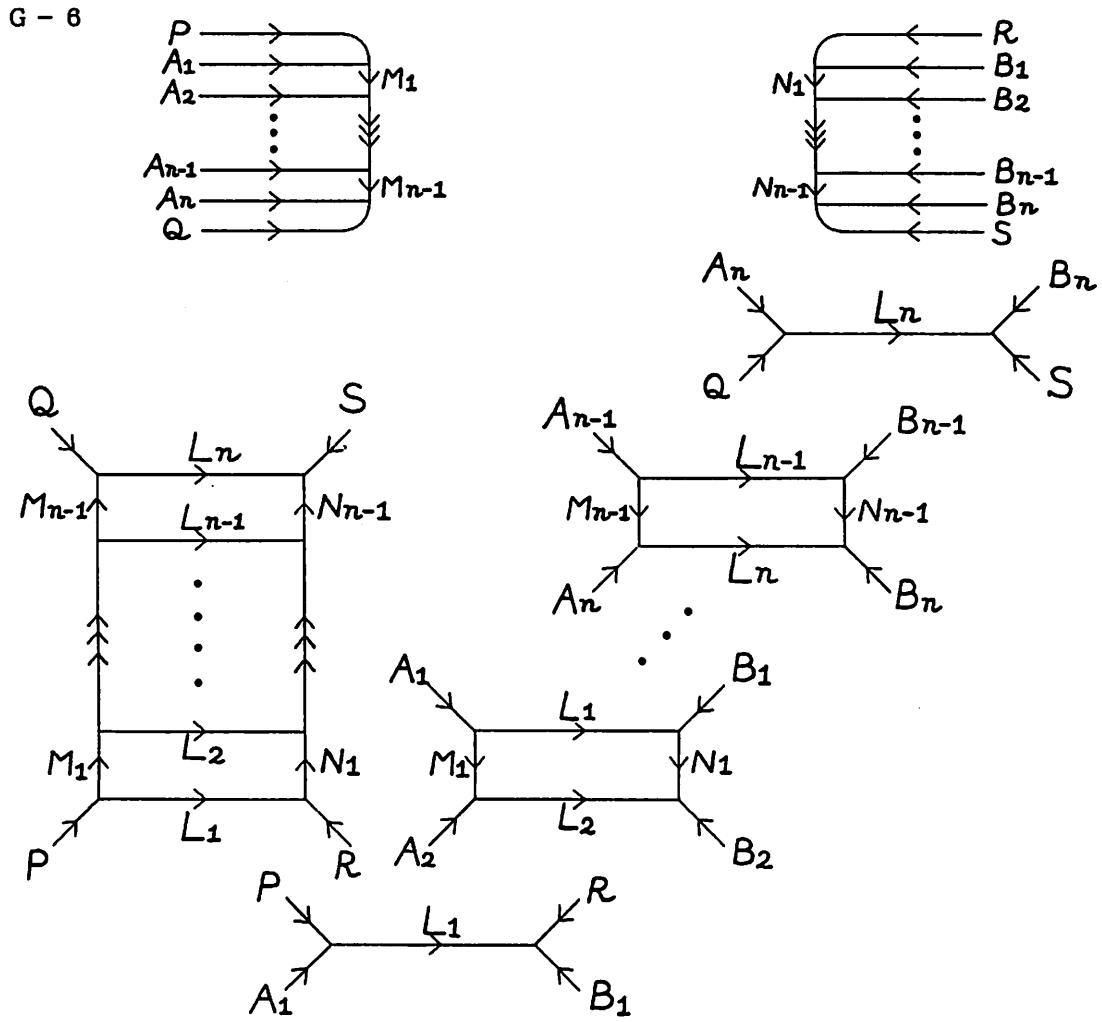


(3) (G-5) \Leftrightarrow (G-6) を D_{n+2} -変形 ($n \geq 2$) と呼ぶ。

G - 5



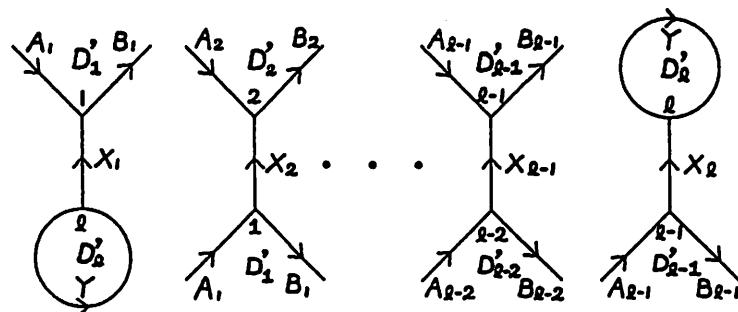
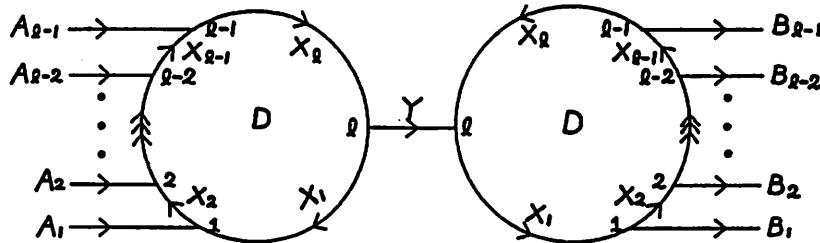
G - 6



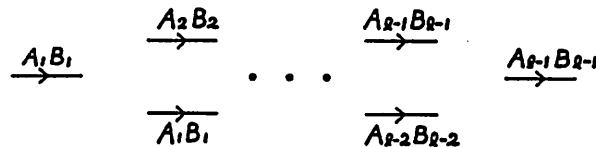
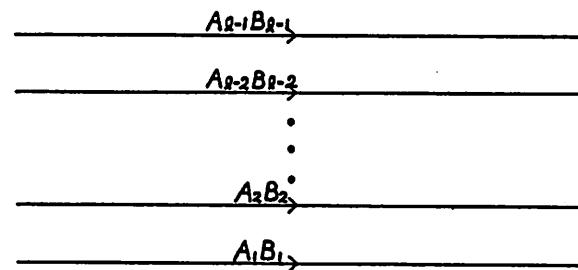
(114)

(4) $(G-7) \Rightarrow (G-8)$ を D_n^{*-} -変形, $(G-8) \Rightarrow (G-7)$ を D_n^{*+} -変形 ($n \geq 2$) と呼び, この二つを総称して D_n^* -変形と呼ぶ.

G - 7



G - 8



(1)から(4)の変形を総称して DS -変形という.

定理 8. DS -変形は, DS -構造および連結可付向閉 3-多様体の同相性を保存する変形である.

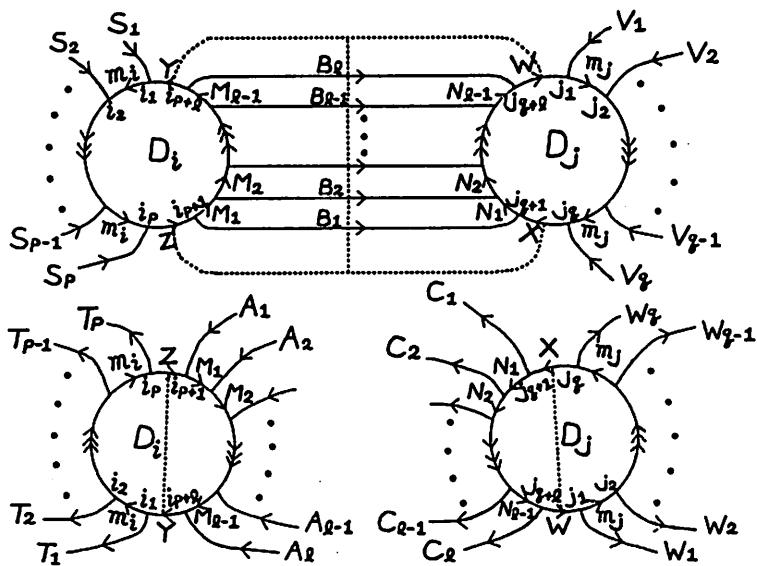
§ 4. 主定理(定理2~6)の証明

命題1より $G(m, l) \cup G(l, m)$ は連結性を除いて DS-diagram の条件を満たす。従つて次の補題が成り立つ。

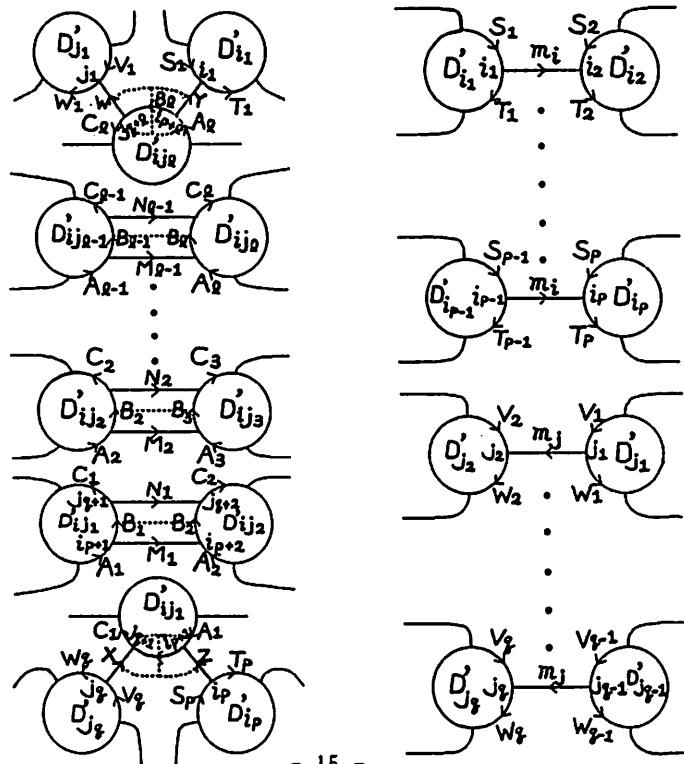
補題1. $G(m, l) \cup G(l, m)$ に DS-変形が適用できる。

定理2の証明 $(1-A) \cup (1-A')$ に点線のように D_{i+2} -変形 ($G6 \Rightarrow G5$) を行うと, $(1-C) \cup (1-C')$ を得る。

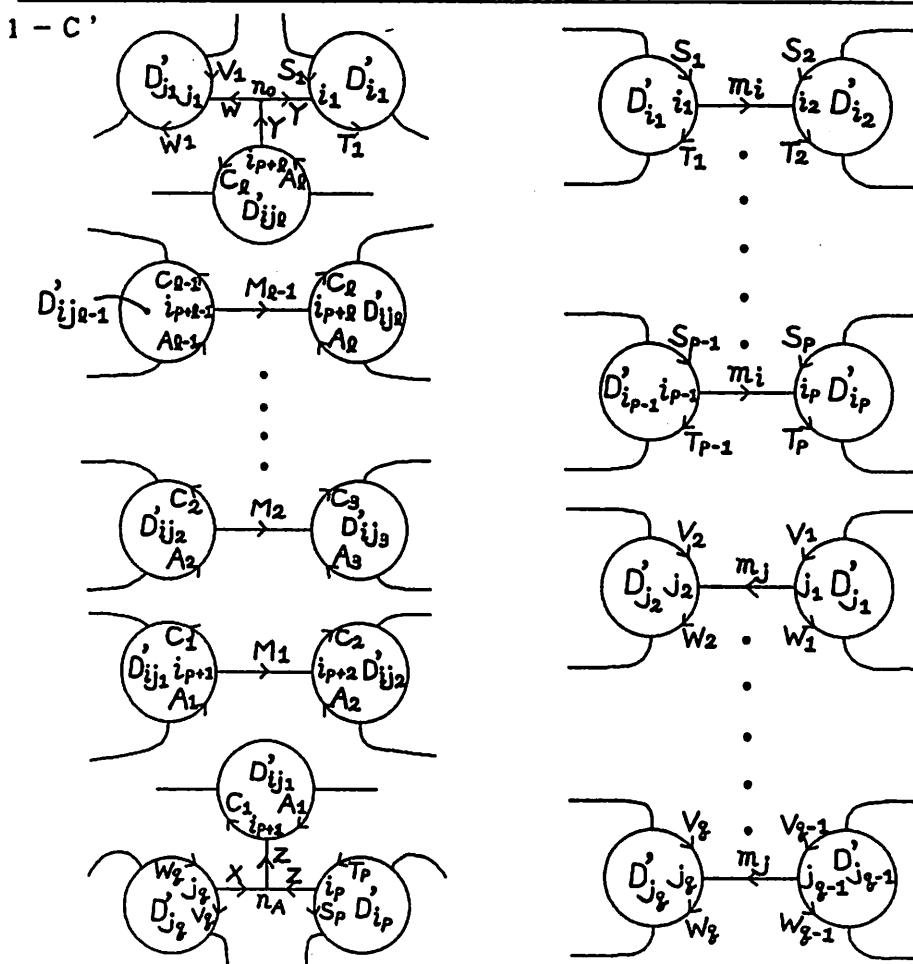
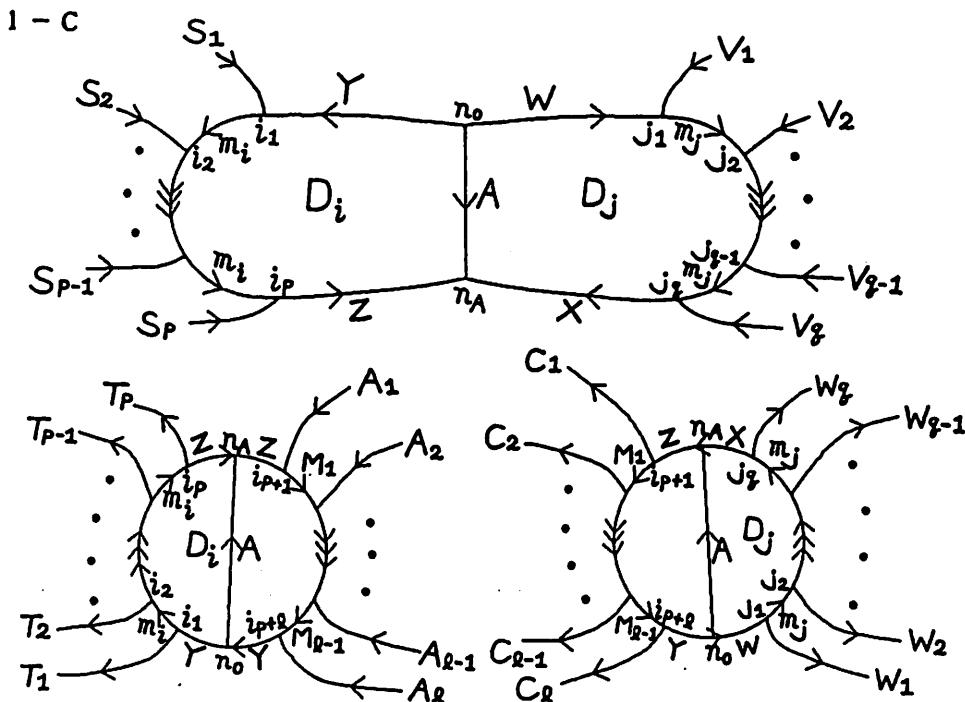
1 - A



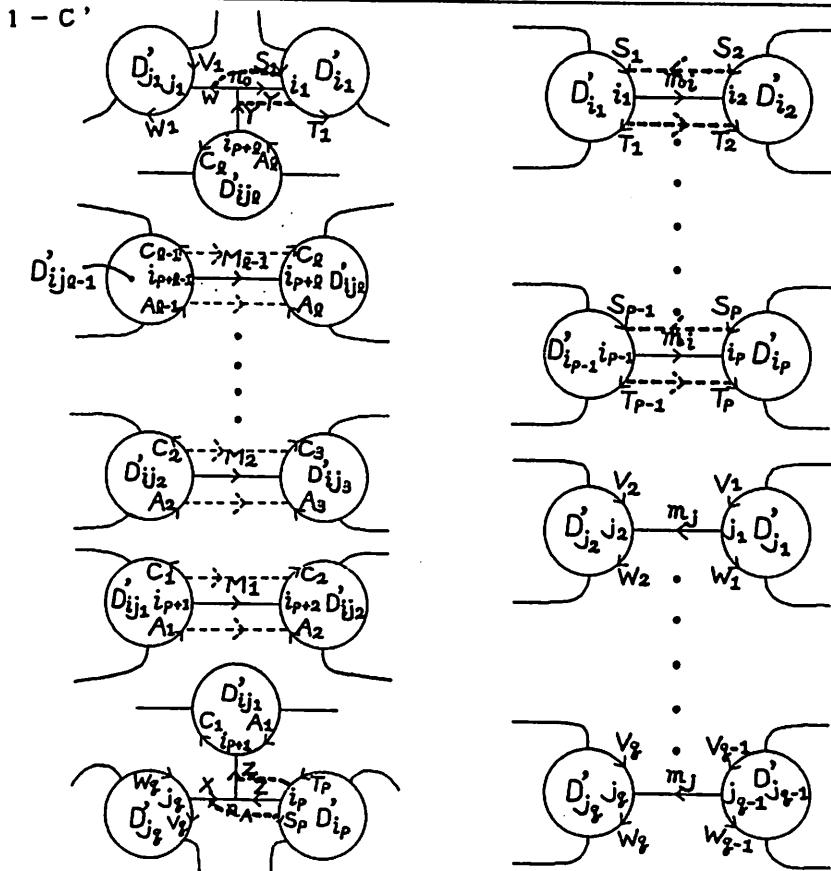
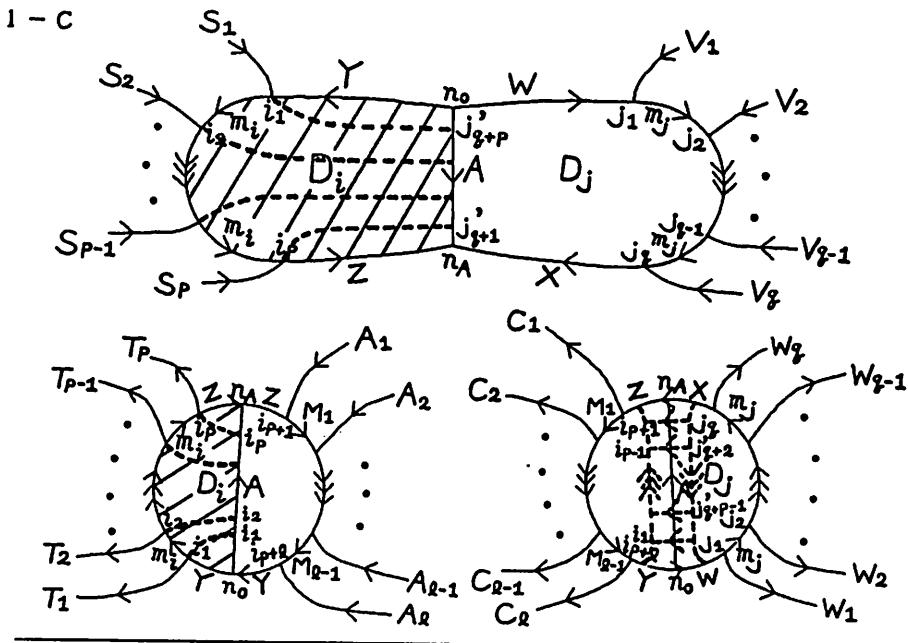
1 - A'



(116)

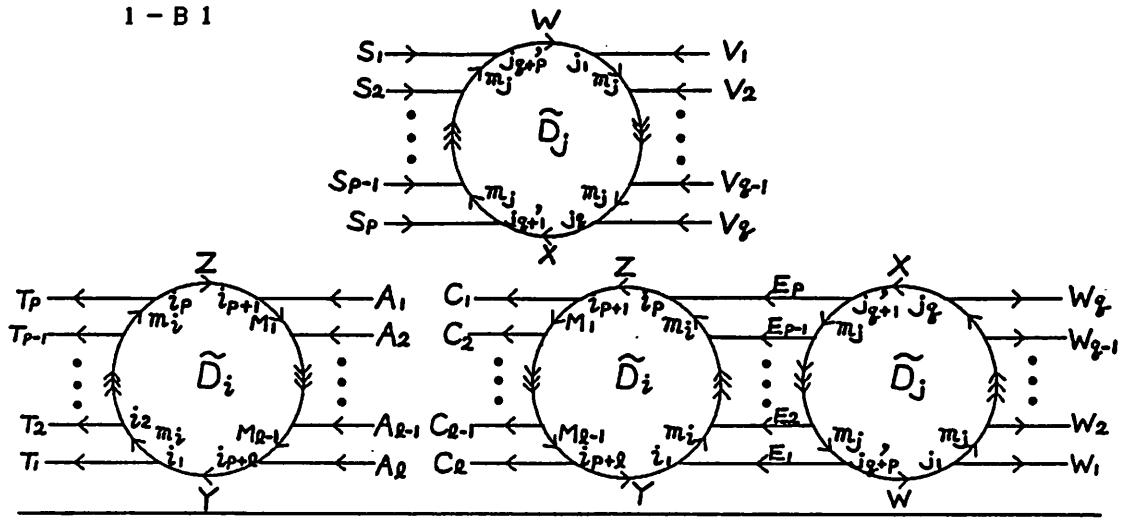


さらに、 $(1-C) \cup (1-C')$ に太線の点線のように D_{r+2} -変形 ($G5 \Rightarrow G6$)を行うと、Heegaard diagrams $(1-B1) \cup (1-B1')$ を得る。これが要求される Heegaard diagrams である。

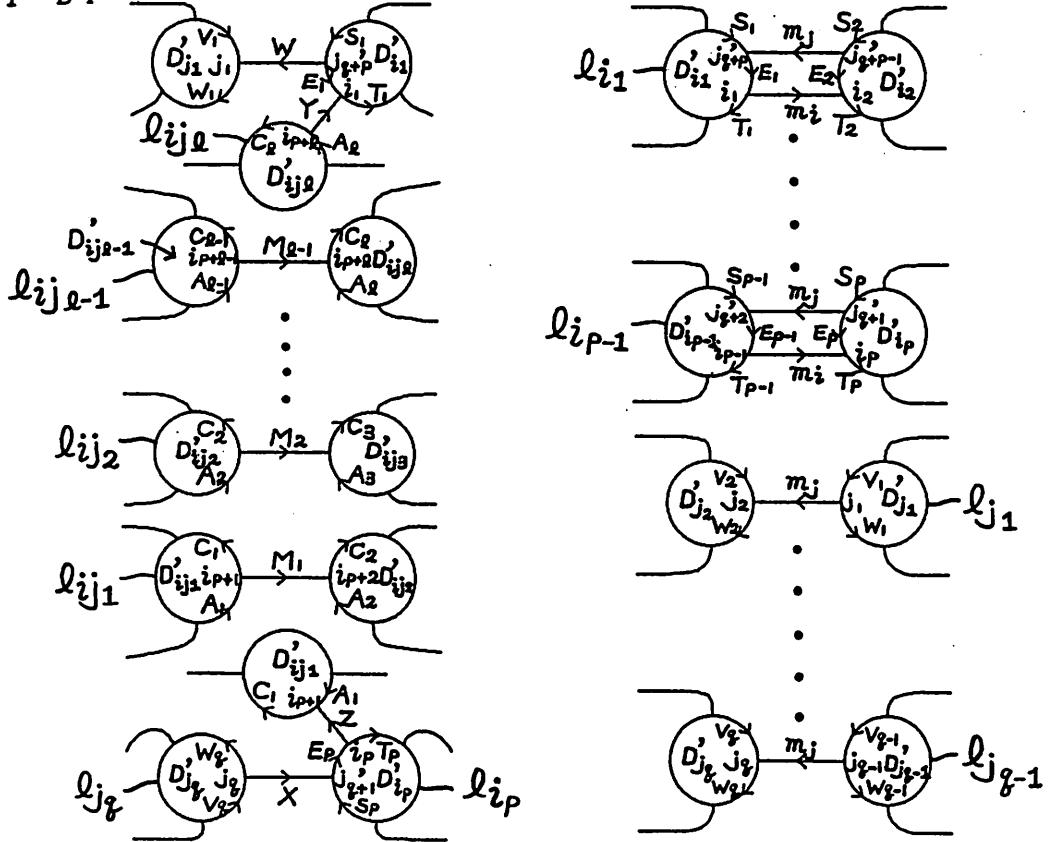


(118)

1 - B 1



1 - B 1 '



(1-B1')から得られる基本群は(1B1')である.

1-A の meridian $m_j = \partial D_j$ が 1-B の各 meridian と交差する仕方と, 1-B1 の meridian $\hat{m}_j = \partial \hat{D}_j$ が 1-B1' の各 meridian と交差する仕方は, 各 meridian の向きを含めて同じである. 従って 1-B1' の \hat{m}_j から得られる関係式の読みは, (1A')の①と同じくなる.

1-B1 の meridian $\hat{m}_j = \partial \hat{D}_j$ が 1-B1' の各 meridian と交差するときの読みは, $l_{j,1} \cdots l_{j,q} l_{j,p}^{-1} \cdots l_{j,1}^{-1}$ である. $(1-A) \cup (1-A')$ から

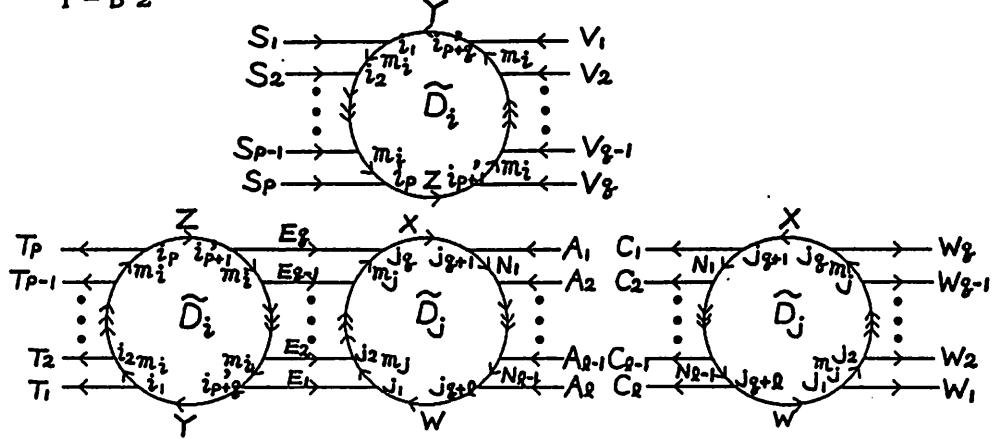
$(1-C) \cup (1-C')$ を経由して $(1-B1) \cup (1-B1')$ への変換は, 1-A の meridian $\partial D_j = m_j = j_1(m_j) j_2 \cdots j_{q-1}(m_j) j_q(X) j_{q+1}(N_1) j_{q+2} \cdots j_{q+p-1}(N_{p-1}) j_{q+p}(W) j_1$ を 1-B1 の meridian

$\partial \hat{D}_j = \hat{m}_j = j_1(m_j) j_2 \cdots j_{q-1}(m_j) j_q(X) j_{q+1}'(m_j) j_{q+2}' \cdots j_{q+p-1}'(m_j) j_{q+p}'(W) j_1$ に代える. 1-A'において各 N_i は M_i ($i=1, \dots, p-1$) と向きを同じくして平行に走っている. また 1-B1'において各 $j_{q+k}(m_j) j_{q+k+1}$ は $i_{p-k}(m_j) i_{p-k+1}$ ($k=1, \dots, p-1$) と向きを反対にして平行に走っている. 従って m_j から \hat{m}_j への変換は, 基本群の表示(1A')の①より得られる $l_{j,1} l_{j,2} \cdots l_{j,j} = l_{j,p}^{-1} \cdots l_{j,2}^{-1} l_{j,1}^{-1}$ を②の $l_{j,1} l_{j,2} \cdots l_{j,j}$ に代入するような変換である.

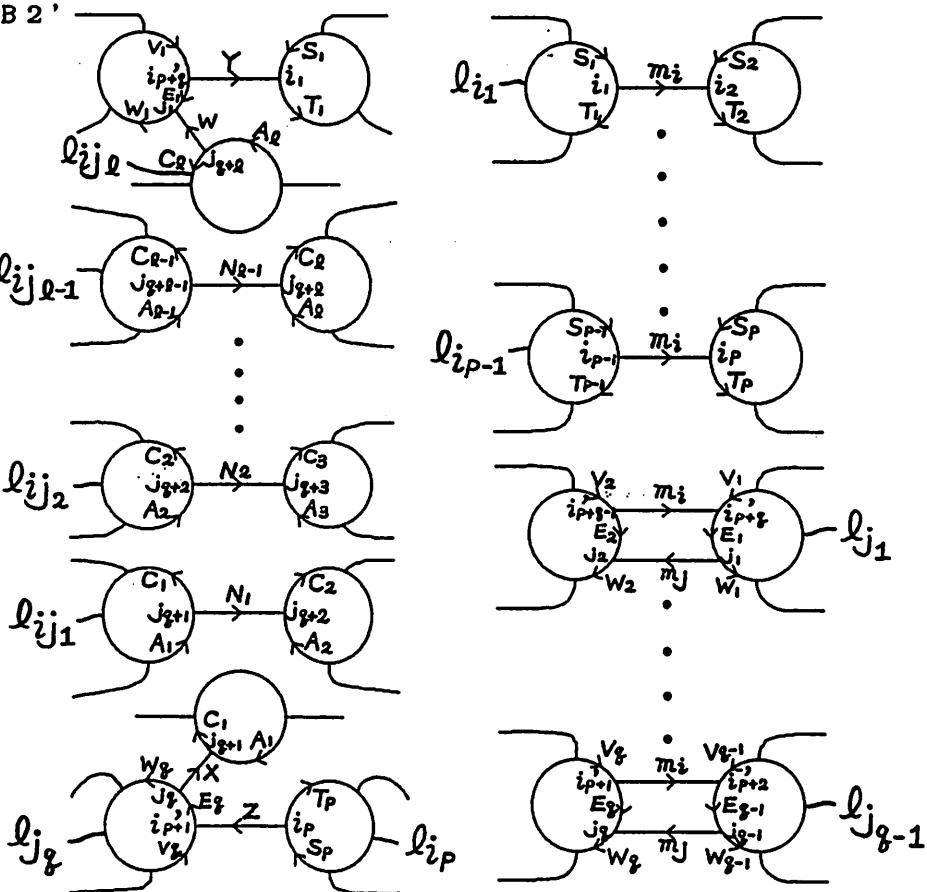
(1A')から(1B2')の場合も, (1A')から(1B1')の場合と同様に証明され, (1B2')に対応する cut diagrams は $(1-B2) \cup (1-B2')$ である.

(120)

1 - B 2

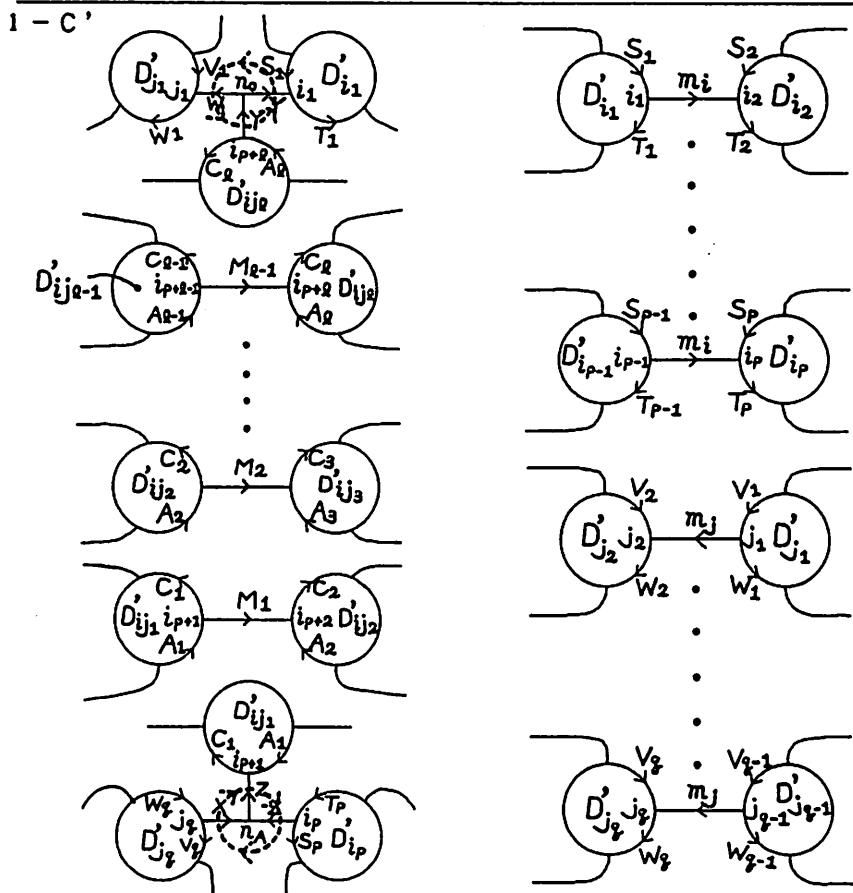
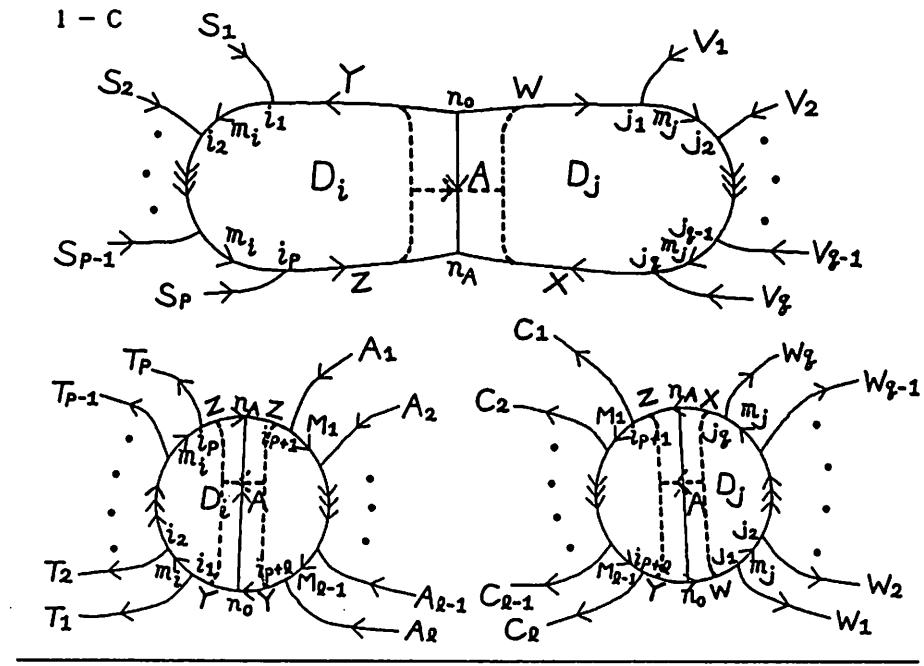


1 - B 2'



□

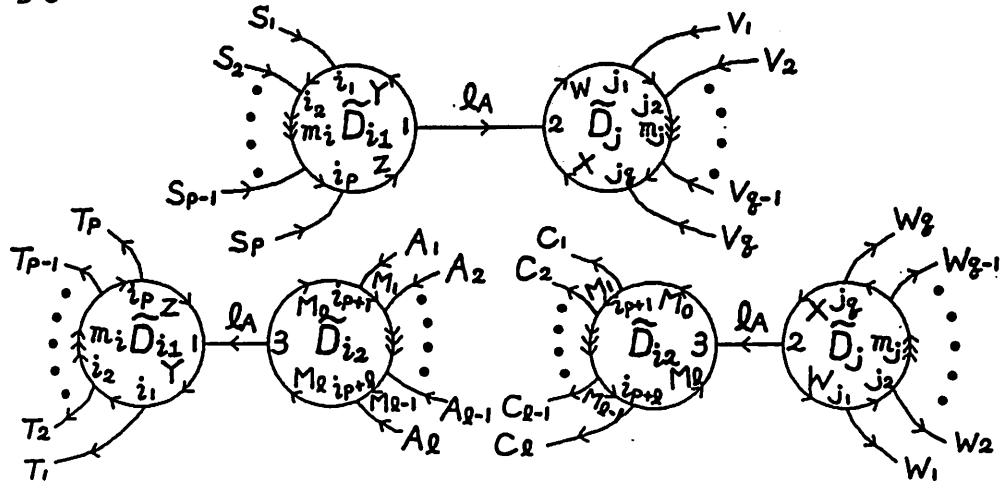
定理3の証明 定理2の証明と同様に、 $(1 - \Lambda) \cup (1 - \Lambda')$ を $(1 - C) \cup (1 - C')$ に変形する。



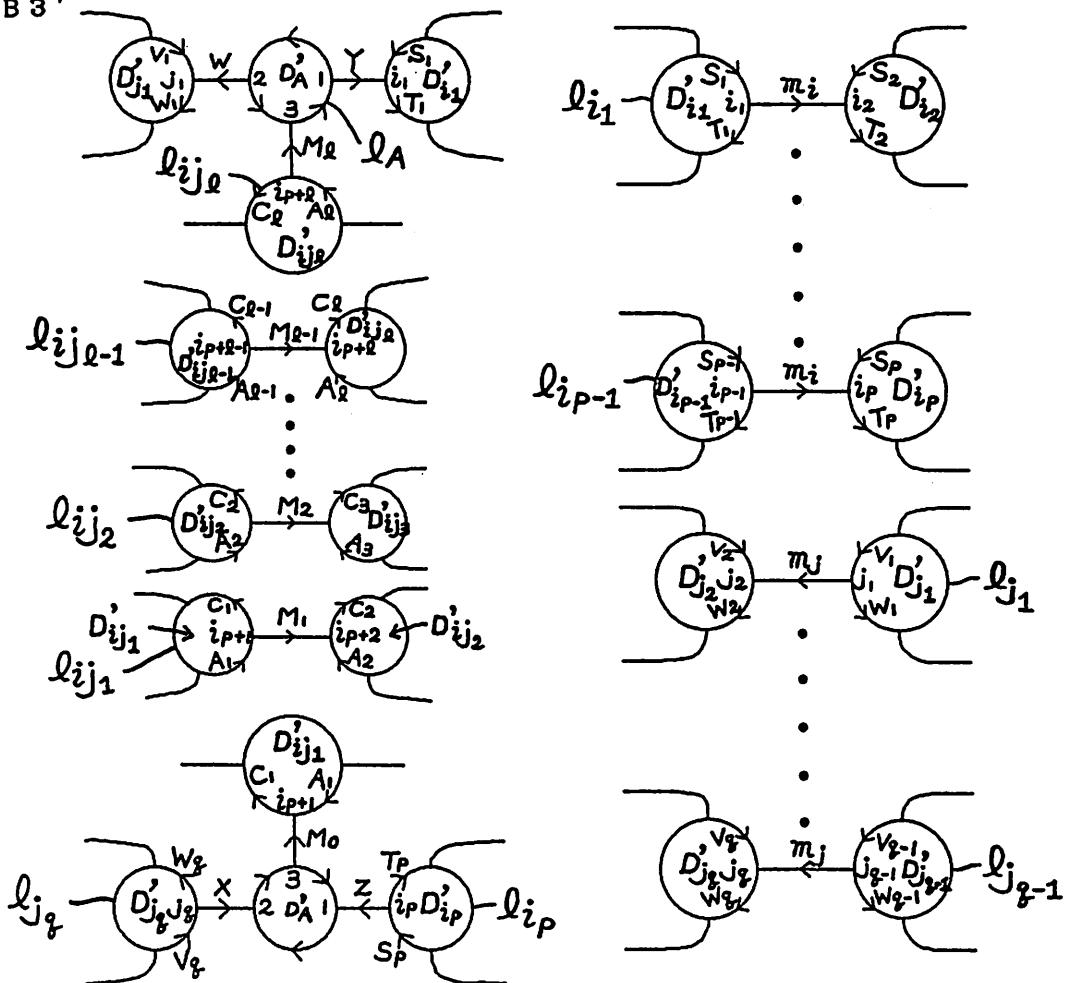
(Y22)

$(1-C) \cup (1-C')$ に D_3^+ -変形(太線の点線)を行うと, genus が 1 増えた Heegaard diagrams $(1-B3) \cup (1-B3')$ を得る. これが要求される Heegaard diagrams である.

1 - B 3



1 - B 3 *



この変換において、1-A の二つの meridians

$$m_I = \partial D_I = i_1(m_I) i_2 \cdots i_{r-1}(m_I) i_r(Z) i_{r+1}(M_1) i_{r+2} \cdots i_{r+l-1}(M_{l-1}) i_{r+l}(Y) i_1 ,$$

$$m_J = \partial D_J = j_1(m_J) j_2 \cdots j_{s-1}(m_J) j_s(X) j_{s+1}(N_1) j_{s+2} \cdots j_{s+l-1}(N_{l-1}) j_{s+l}(W) j_1$$

は 1-B3 の三つの meridians

$$\hat{m}_{I1} = \partial \hat{D}_{I1} = i_1(m_I) i_2 \cdots i_{r-1}(m_I) i_r(Z) i_1(Y) i_1 ,$$

$$\hat{m}_{I2} = \partial \hat{D}_{I2} = i_{r+1}(M_1) i_{r+2} \cdots i_{r+l-1}(M_{l-1}) i_{r+l}(M_l) 3(M_0) i_{r+1} ,$$

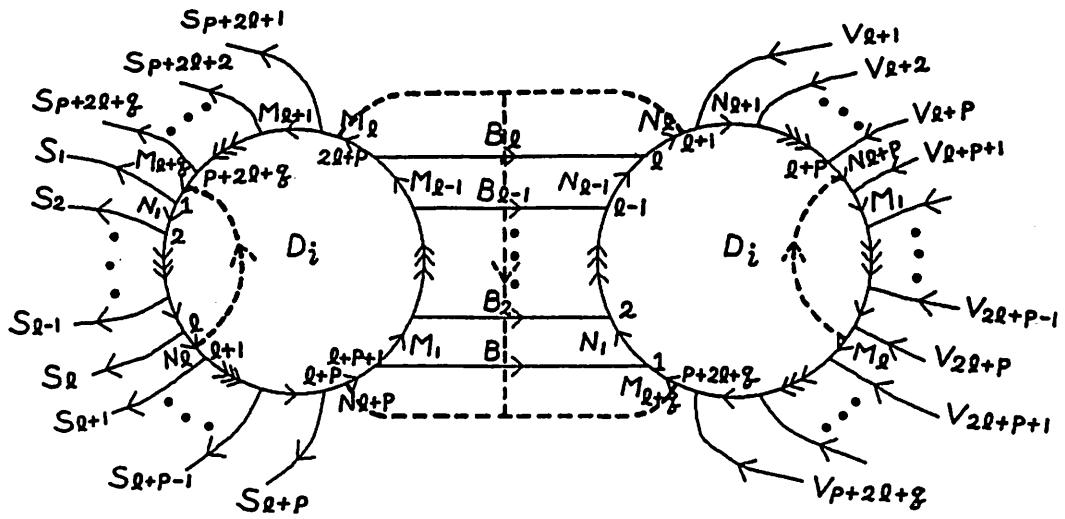
$$\hat{m}_J = \partial \hat{D}_J = j_1(m_J) j_2 \cdots j_{s-1}(m_J) j_s(X) 2(W) j_1$$

に分割される。1-B3' には新しい meridian disk D_A' が発生する。 D_A' の meridian を l_A とする。1-A' において、 m_I の $i_{r+k}(M_k) i_{r+k+1}$ と m_J の $j_{s+k}(N_k) j_{s+k+1}$ ($k=1, \dots, l-1$) は、向きは同じで平行に走っており、これらが 1-B3' では一つの $i_{r+k}(M_k) i_{r+k+1}$ ($k=1, \dots, l-1$) になり、さらに $(M_l) 3(M_0) i_{r+1}$ が結合されて \hat{m}_{I2} が構成される。 \hat{m}_{I1} には $i_r(Z) i_1(Y) i_1$ があり、 \hat{m}_J には $i_{r+l}(M_l) 3(M_0) i_{r+1}$ があるから、 \hat{m}_{I1} 、 \hat{m}_{I2} 、 \hat{m}_J の 1-B3' の各 meridian との交わりにおける読みは、ちょうど(1B3')の関係式の①, ②, ③を与える。□

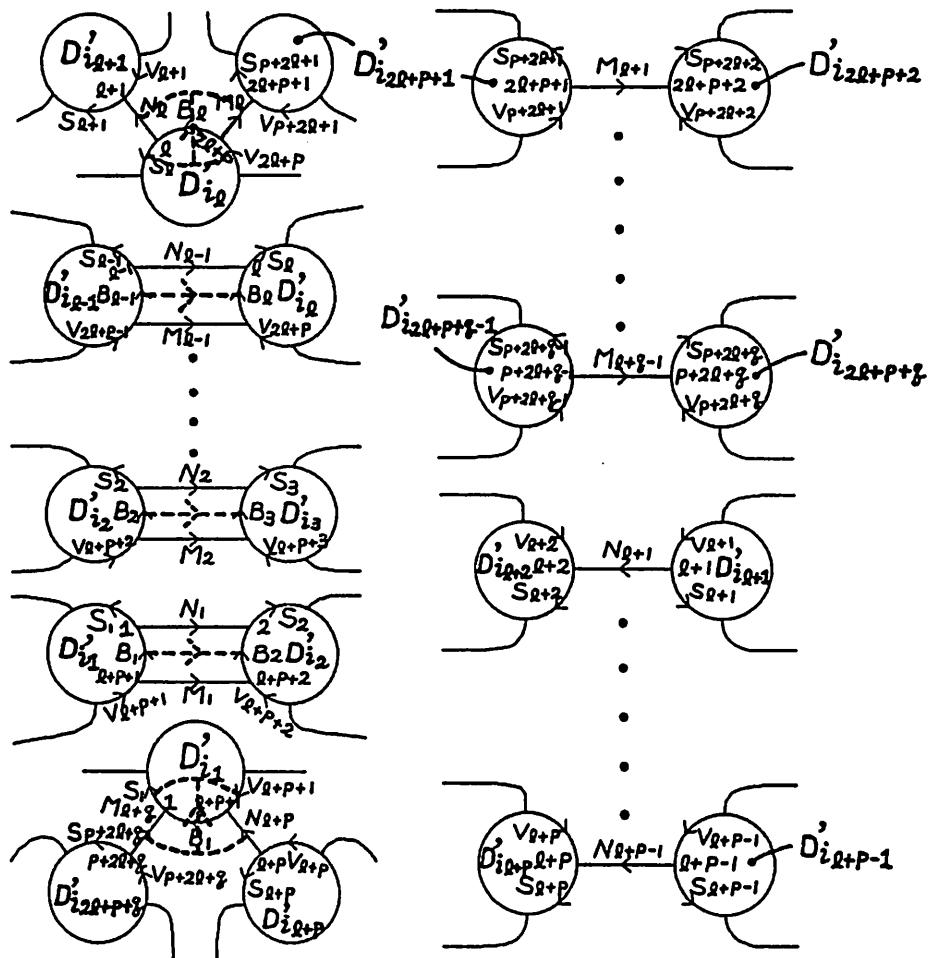
定理 4 の証明 $(2-A) \cup (2-A')$ に点線のように D_{l+2} -変形 ($G-6 \Rightarrow G-5$) を行うと、 $(2-C) \cup (2-C')$ を得る。さらに、 $(2-C) \cup (2-C')$ に太線の点線のように D_3^+ -変形を行いうと、genus を 1 上げた Heegaard diagrams $(2-B) \cup (2-B')$ を得る。これが要求される Heegaard diagrams である。 $2-B'$ の新しい meridian disk D_A' の meridian を l_A とする。この変換は、基本群の変換 $(2A') \rightarrow (2B')$ に対応している。

(124)

2 - A

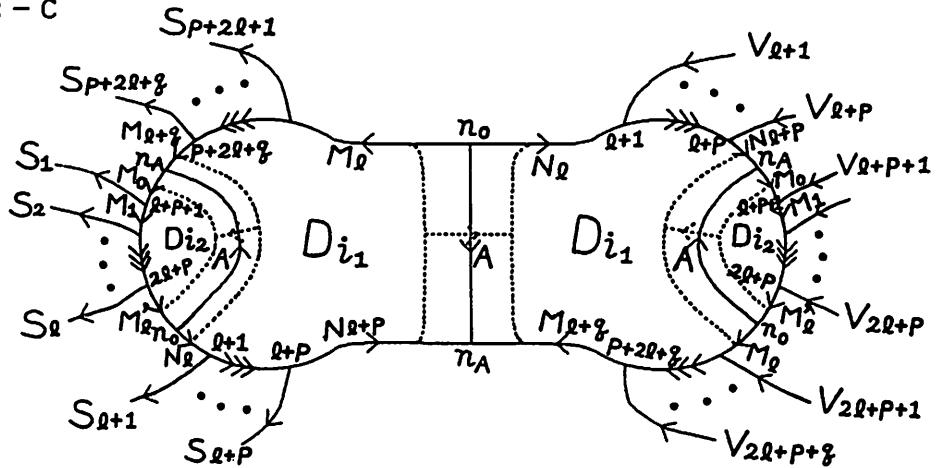


2 - A'

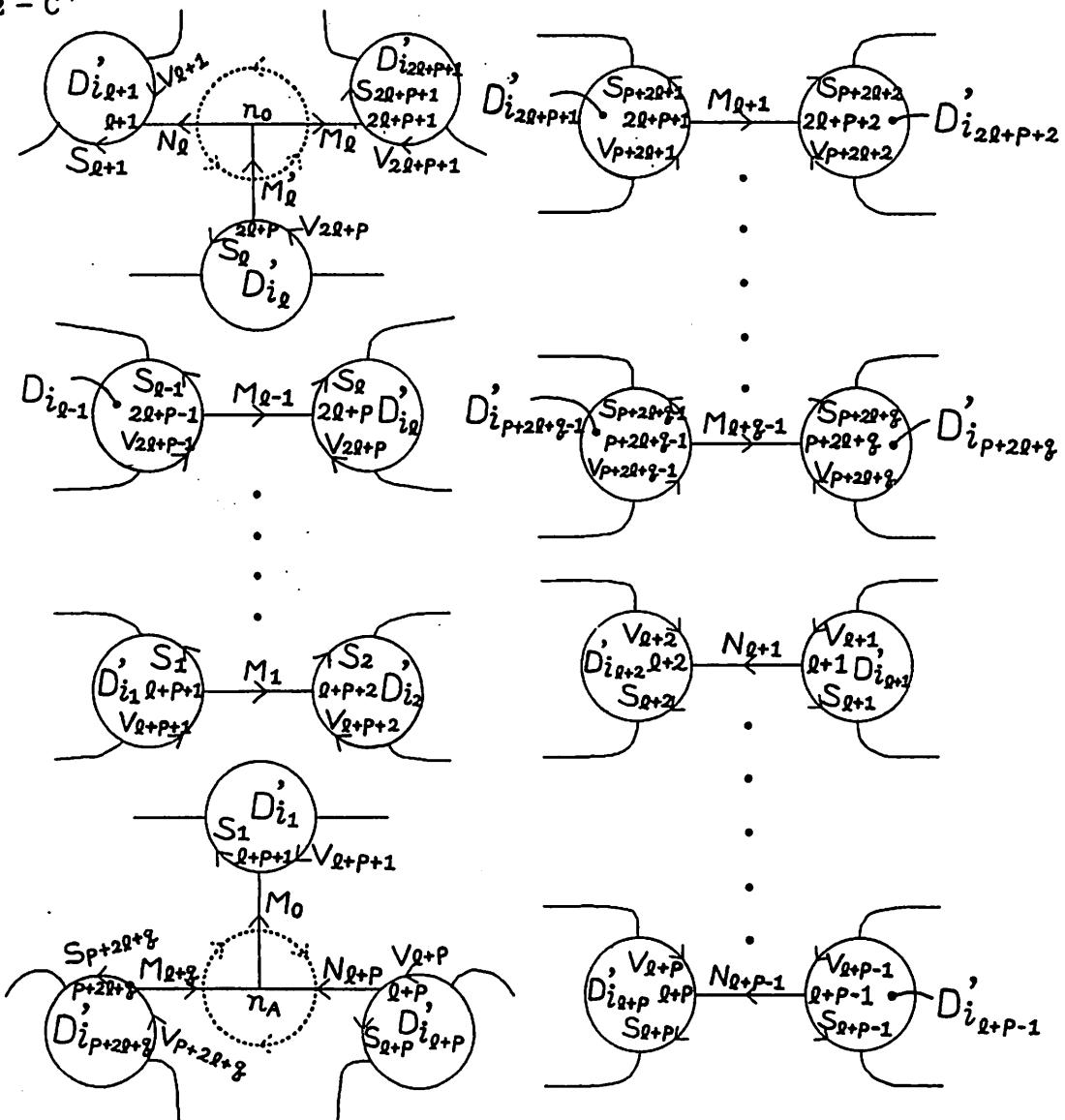


(125)

2 - C

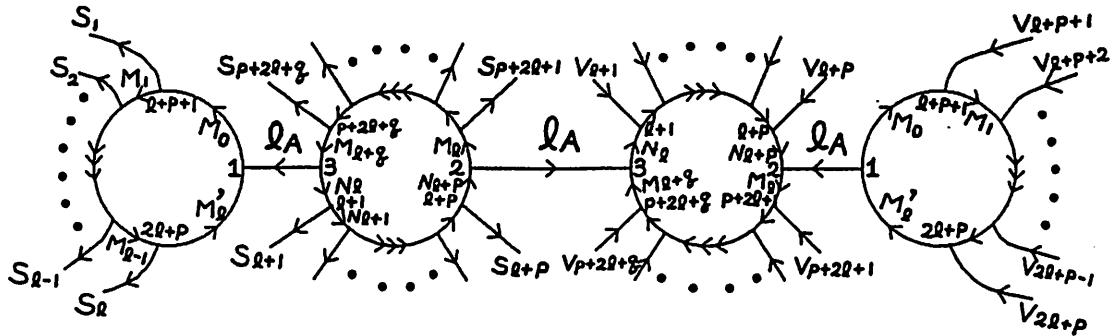


2 - C'

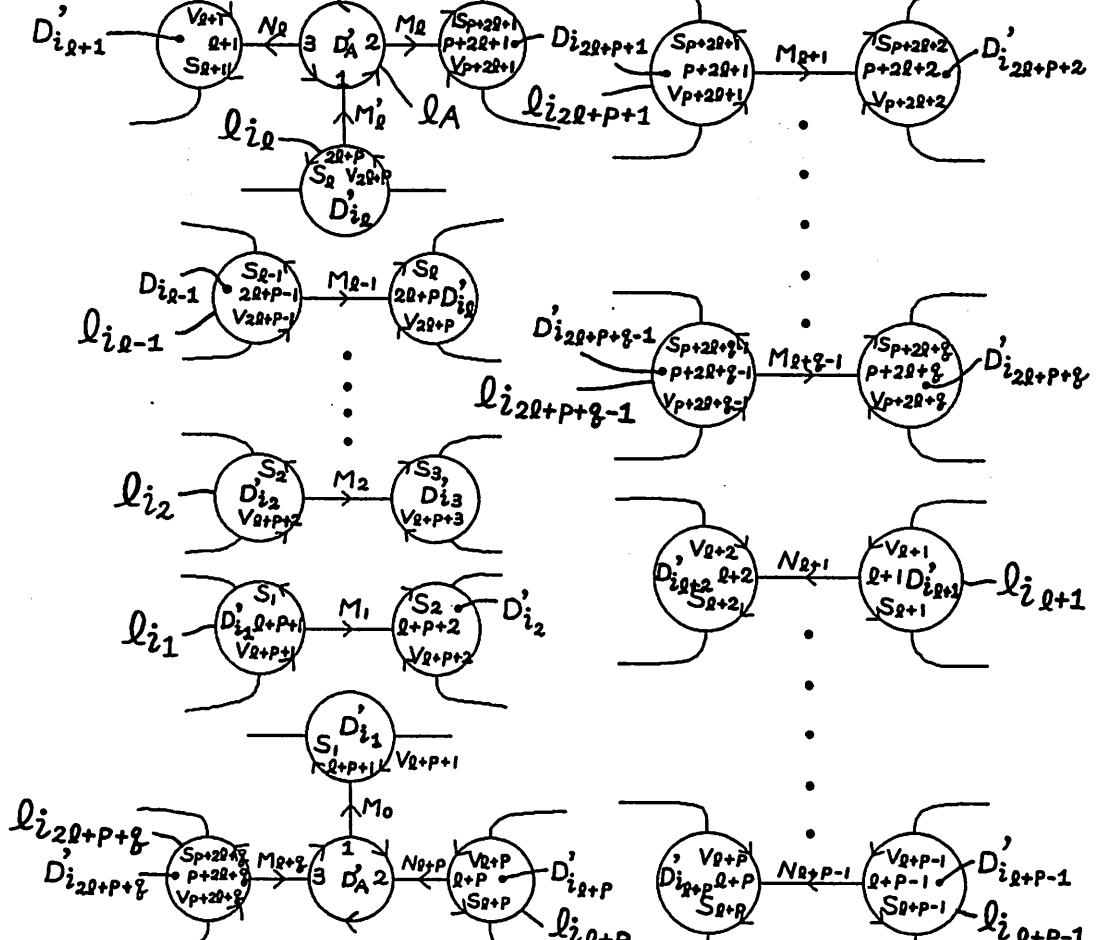


(126)

2 - B

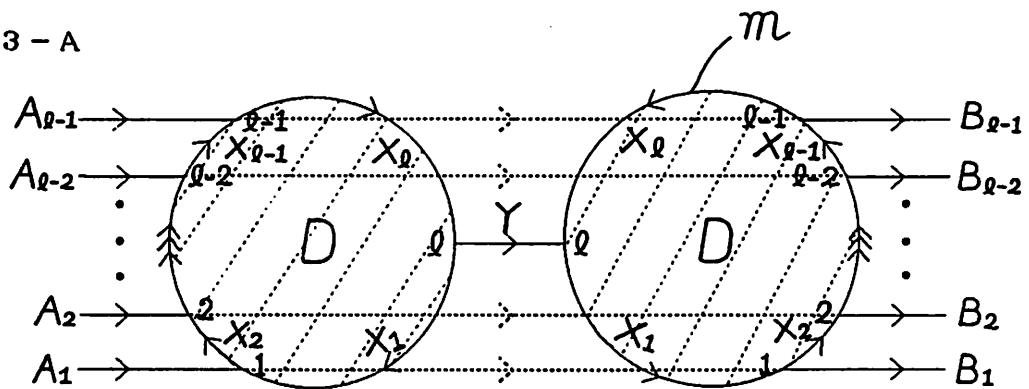


2 - B'

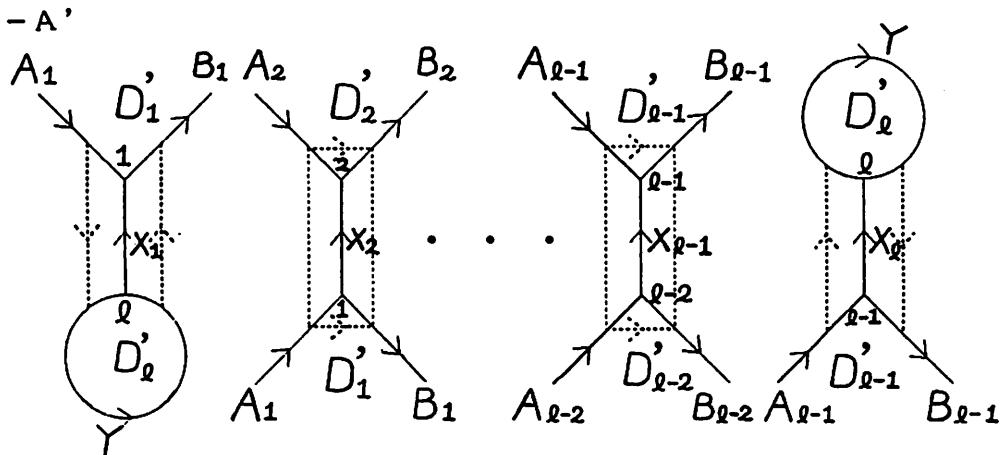


定理 5 の証明 $(3-A) \cup (3-A')$ に点線部分のように D, γ -変形を行うと, genus を 1 下げた $(3-B) \cup (3-B')$ を得る. これが要求される Heegaard diagrams である. $3-A$ に対応する Heegaard diagram を $(U; m, l)$ とすると, $3-A$ の部分に対応する U の handle は $3-C$ のようになっている. つまり $3-A$ から $3-B$ への変換は, $3-C$ において, longitude γ は disk D' を bound しているから, ∂D と交わっている各 longitude の一部分の A_i, B_i ($i = 1, \dots, l-1$) を ambient isotopy で D' 上を左に滑らせて $\partial D'$ および ∂D と交わらないようにできる. つぎに U を meridian disk D で切って得られる Heegaard splitting の Heegaard diagram が $3-B$ である. このことは $(3A)$ において $m=1$ を, m を含む他の関係式に代入して得られる $(3B)$ の表示に対応する Heegaard diagram は $3-B$ であることを示している.

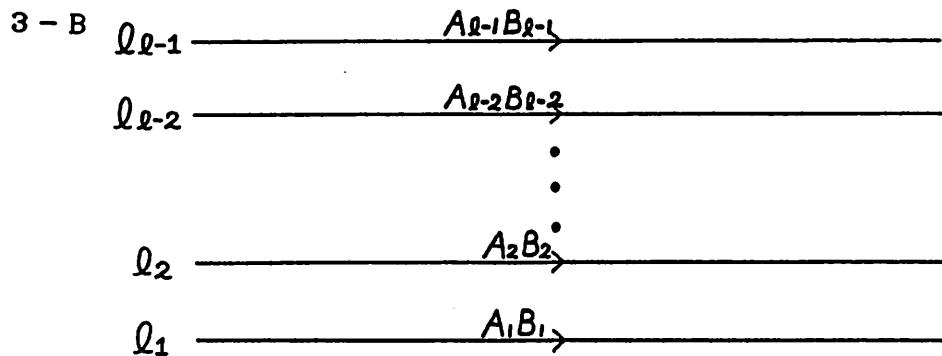
3 - A



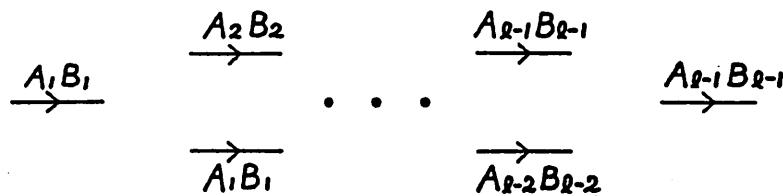
3 - A'



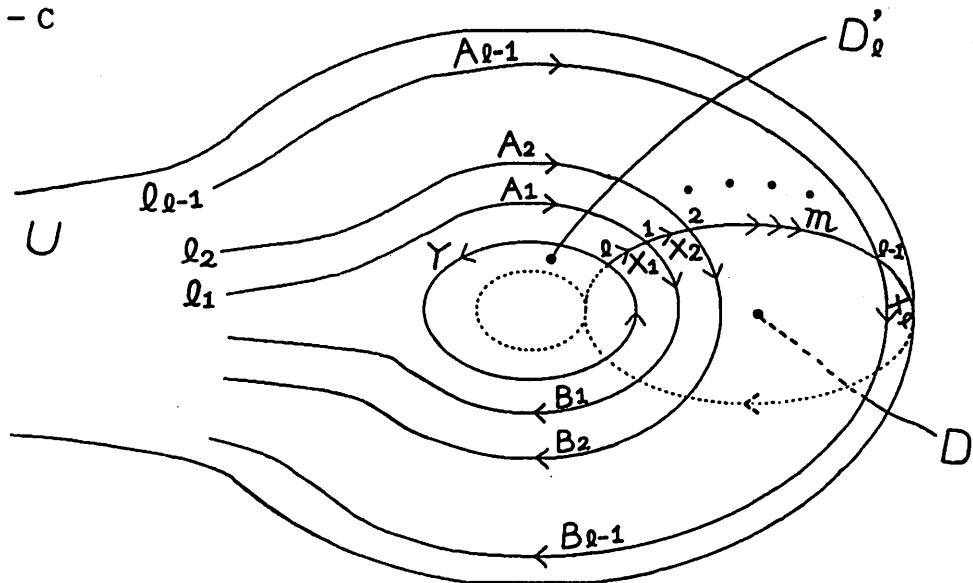
(128)



3 - B'



3 - C

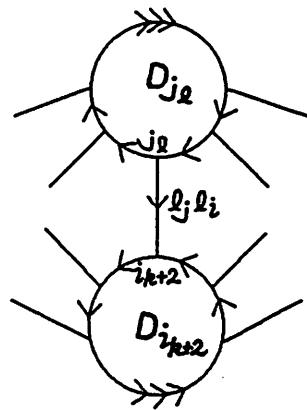
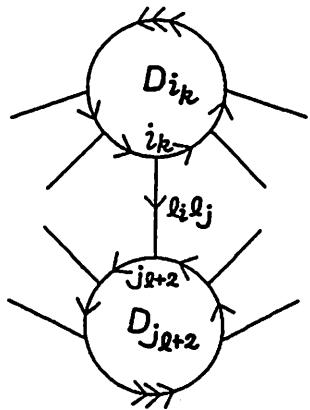


$$l_i = \cdots A_i B_i \cdots \quad (i=1, \dots, \ell-1)$$

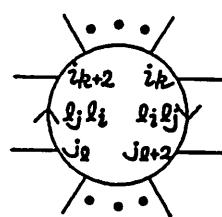
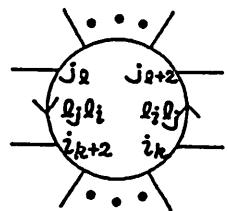
□

定理 6 の証明 $(4-A) \cup (4-A')$ に D_2 -変形を行うと, genus が 1 下がった $(4-B) \cup (4-B')$ を得る. そして $4-A$ からの基本群の表示は $(4B)$ となる.

4 - B



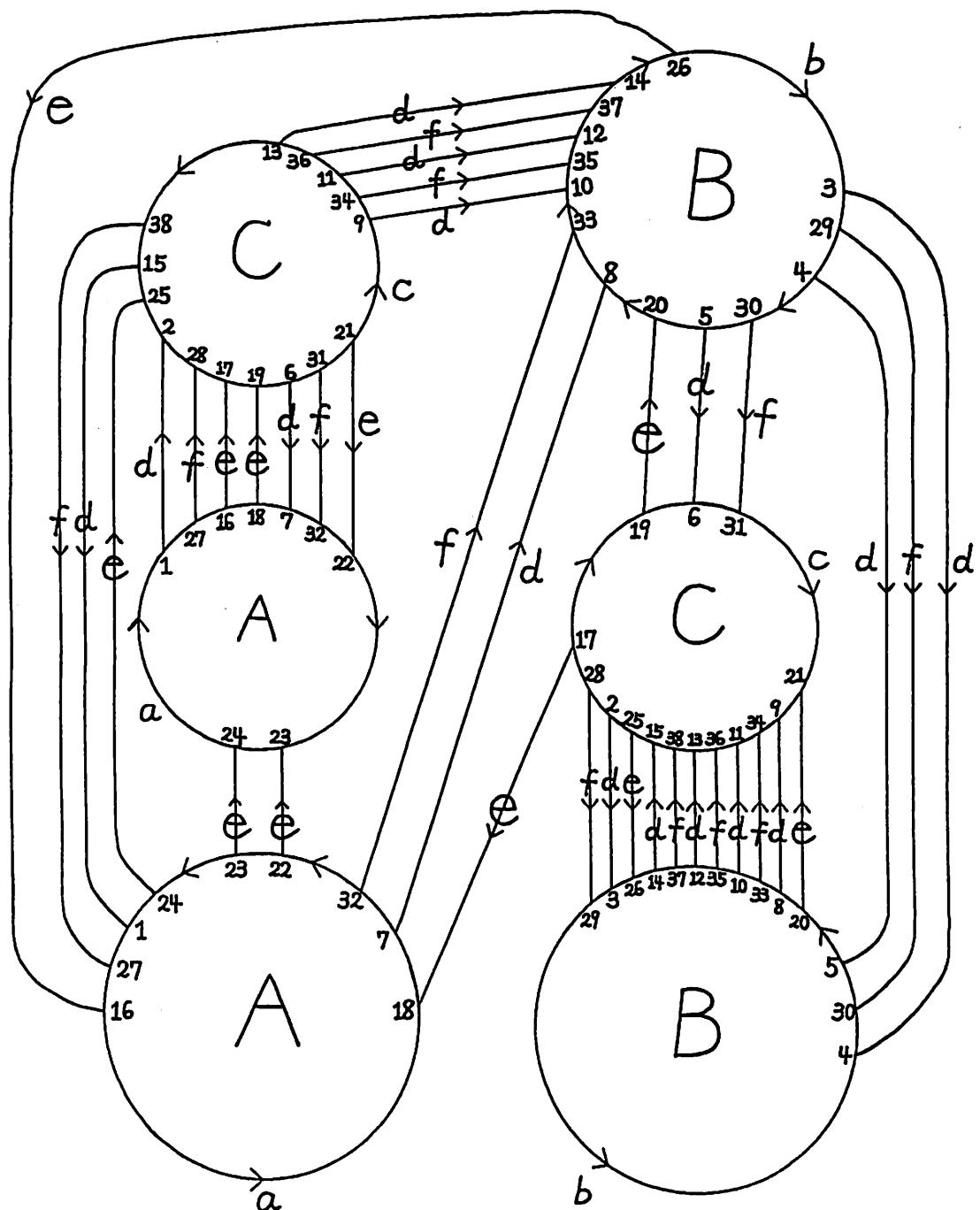
4 - B'

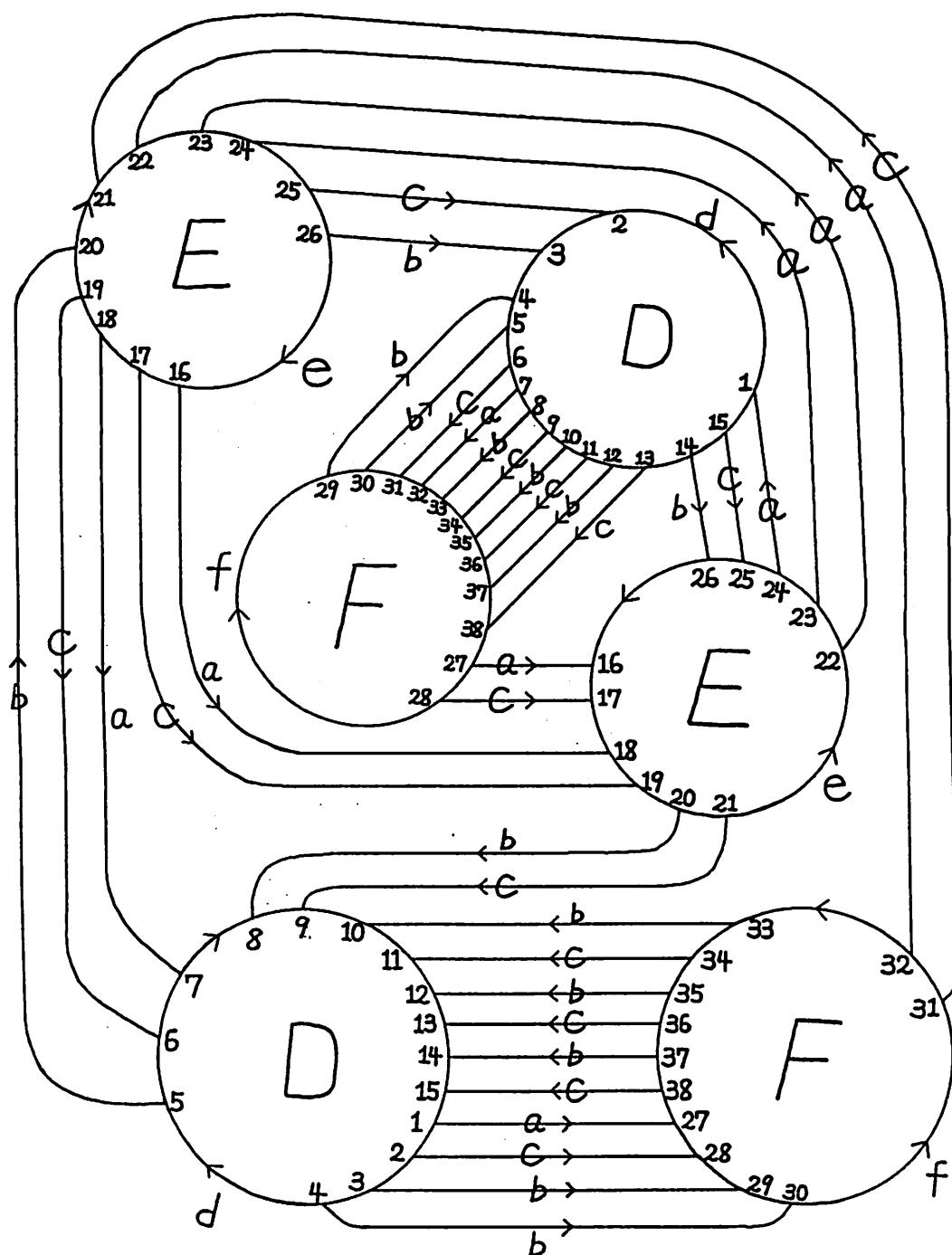


□

§ 5. Examples

例3. (落合[10]) wave の存在しない S^3 の genus 3 の Heegaard diagrams
 $(U; d, e, f)$





(/32)

$(V; a, b, c)$ から得られる基本群は

$$\pi_1 = \langle d, e, f \mid \begin{array}{l} d^{-1}f^{-1}e^{-1}e^{-1}dfeee=1 \cdots \textcircled{1} (\text{a の読み(1:出発点)}) \\ (\text{wave}) \quad \underline{de^{-1}d^{-1}f^{-1}d^{-1}f^{-1}d^{-1}edfdfdf}=1 \cdots \textcircled{2} (\text{b の読み(14:出発点)}) \\ \text{存在しない) } \quad \underline{de^{-1}d^{-1}f^{-1}e^{-1}e^{-1}dfedfdfdf}=1 \cdots \textcircled{3} (\text{c の読み(15:出発点)}) \end{array} \rangle (1')$$

である。 $(1')$ の $\textcircled{2}$ より $\underline{edfdfdfde^{-1}d^{-1}f^{-1}}=dfd$ を得る。これを $\textcircled{3}$ の $\underline{edfdfdfde^{-1}d^{-1}f^{-1}}$ に代入すると $(3')$ の読みを得る。

$$\pi_1 = \langle d, e, f \mid \begin{array}{l} d^{-1}f^{-1}e^{-1}e^{-1}dfeee=1 \cdots \textcircled{1} (\text{a の読み(1:出発点)}) \\ (\text{wave}) \quad \underline{de^{-1}d^{-1}f^{-1}d^{-1}f^{-1}d^{-1}edfdfdf}=1 \cdots \textcircled{2} (\text{h の読み(19:出発点)}) \\ \text{存在しない) } \quad \underline{e^{-1}e^{-1}dfdfdf}=1 \cdots \textcircled{3} (\text{g の読み(16:出発点)}) \end{array} \rangle (3')$$

$(U; d, e, f) \cup (V; a, b, c)$ において、 $(U; d, e, f)$ の

$\{20e21, 8d9, 33f34, 10d11, 35f36, 12d13, 37f38, 14d15, 25e26, 2d3, 28f29\}$

の所で D_{13} -変形を行って得られた Heegaard diagrams を $(U'; d, e, f) \cup (V'; a, g, h)$ とする。 $(3')$ は $(V'; a, g, h)$ から得られる基本群の表示である。

$(3')$ の $\textcircled{3}$ より $\underline{d^{-1}f^{-1}d^{-1}f^{-1}d^{-1}e}=e^{-1}$ を得る。これを $\textcircled{2}$ の $\underline{d^{-1}f^{-1}d^{-1}f^{-1}d^{-1}e}$ に代入すると $(5')$ の読みを得る。

$$\pi_1 = \langle d, e, f \mid \begin{array}{l} d^{-1}f^{-1}e^{-1}e^{-1}dfeee=1 \cdots \textcircled{1} (\text{a の読み(1:出発点)}) \\ (\text{wave}) \quad \underline{de^{-1}e^{-1}dfdfdf}=1 \cdots \textcircled{2} (\text{j の読み(19:出発点)}) \\ \text{存在する) } \quad \underline{e^{-1}e^{-1}dfdfdf}=1 \cdots \textcircled{3} (\text{i の読み(16:出発点)}) \end{array} \rangle (5')$$

$(U'; d, e, f) \cup (V'; a, g, h)$ において、 $(U'; d, e, f)$ の

$\{21d15, 22f14, 23d13, 24f12, 25d11, 10e26\}$

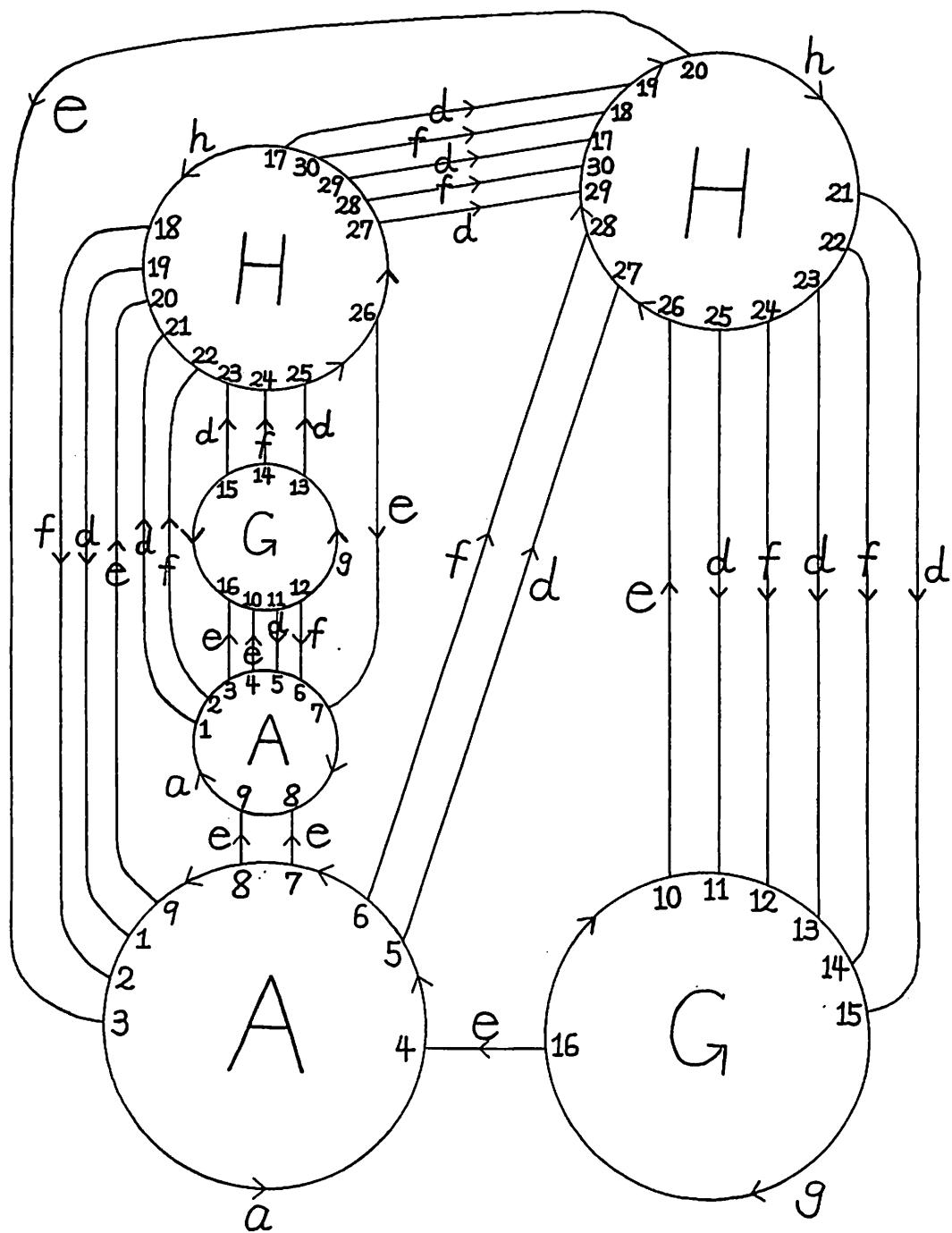
の所で D_8 -変形を行って得られた Heegaard diagrams を $(U''; d, e, f) \cup (V''; a, i, j)$ とする。 $(5')$ は $(V''; a, i, j)$ から得られる基本群の表示である。

練習問題1. $(U; d, e, f) \cup (V; a, b, c) \Rightarrow (U'; d, e, f) \cup (V'; a, g, h) \Rightarrow$

$(U''; d, e, f) \cup (V''; a, i, j)$

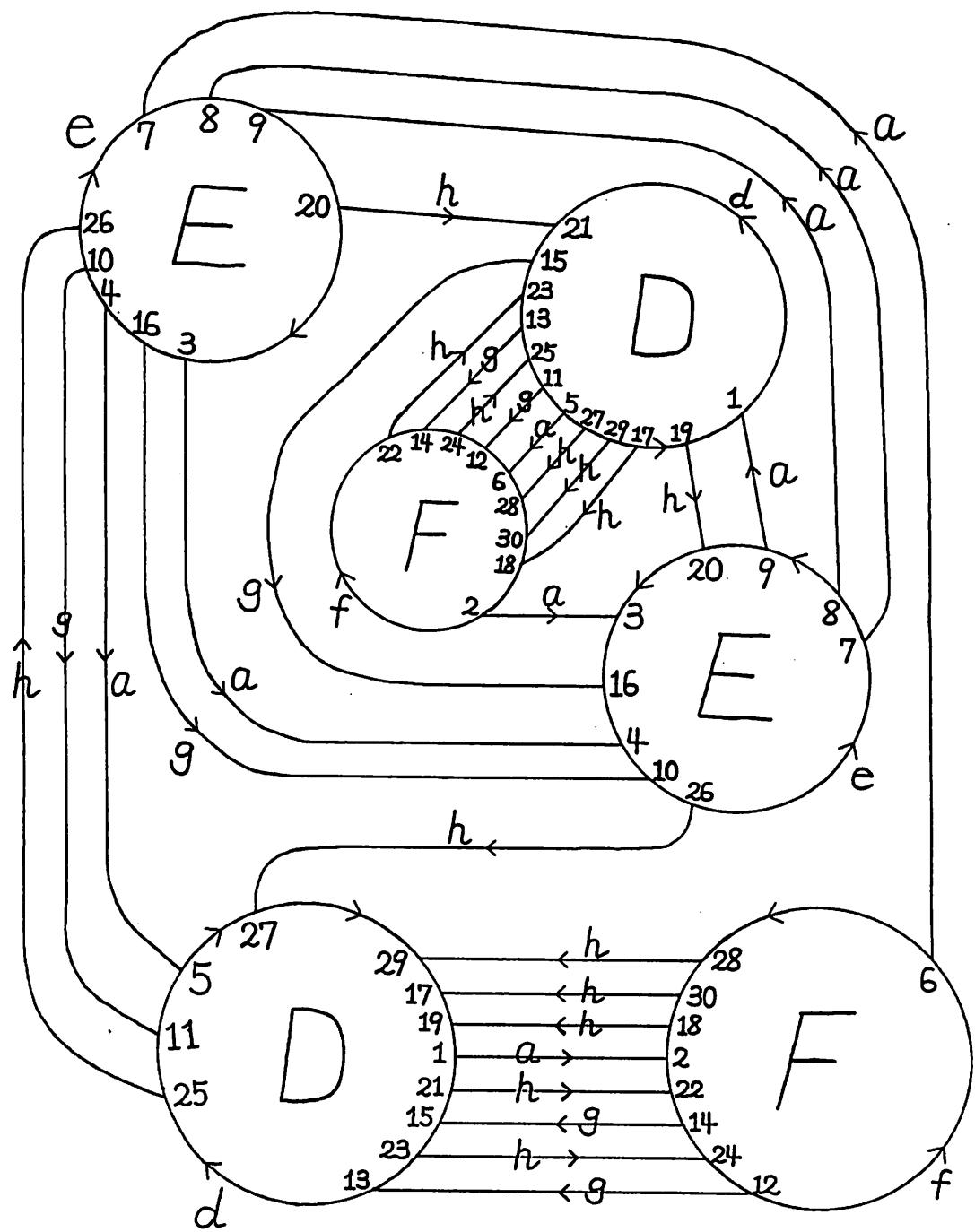
の変換を行え。

(U'; d, e, f)



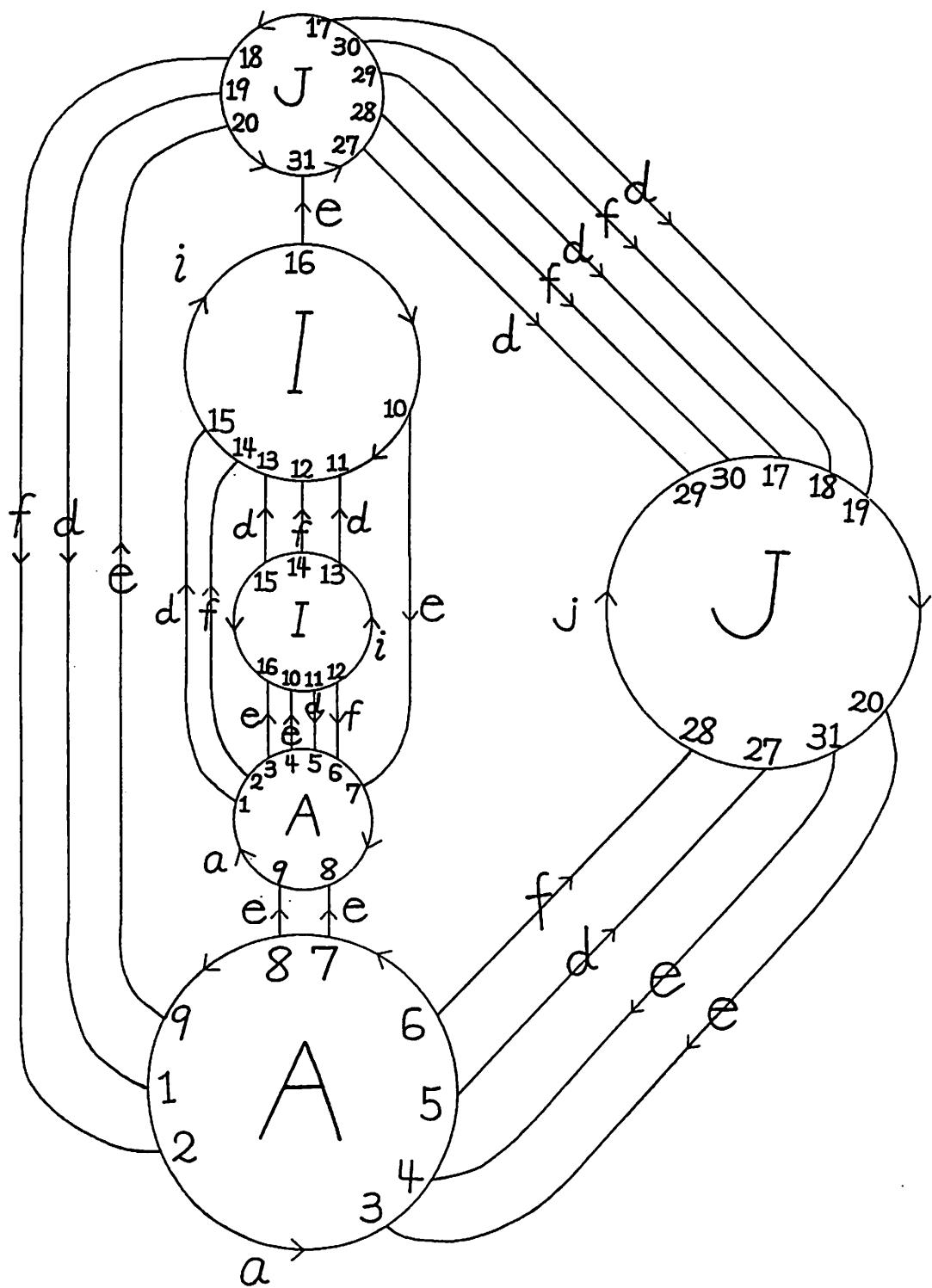
(134)

(V'; a, g, h)



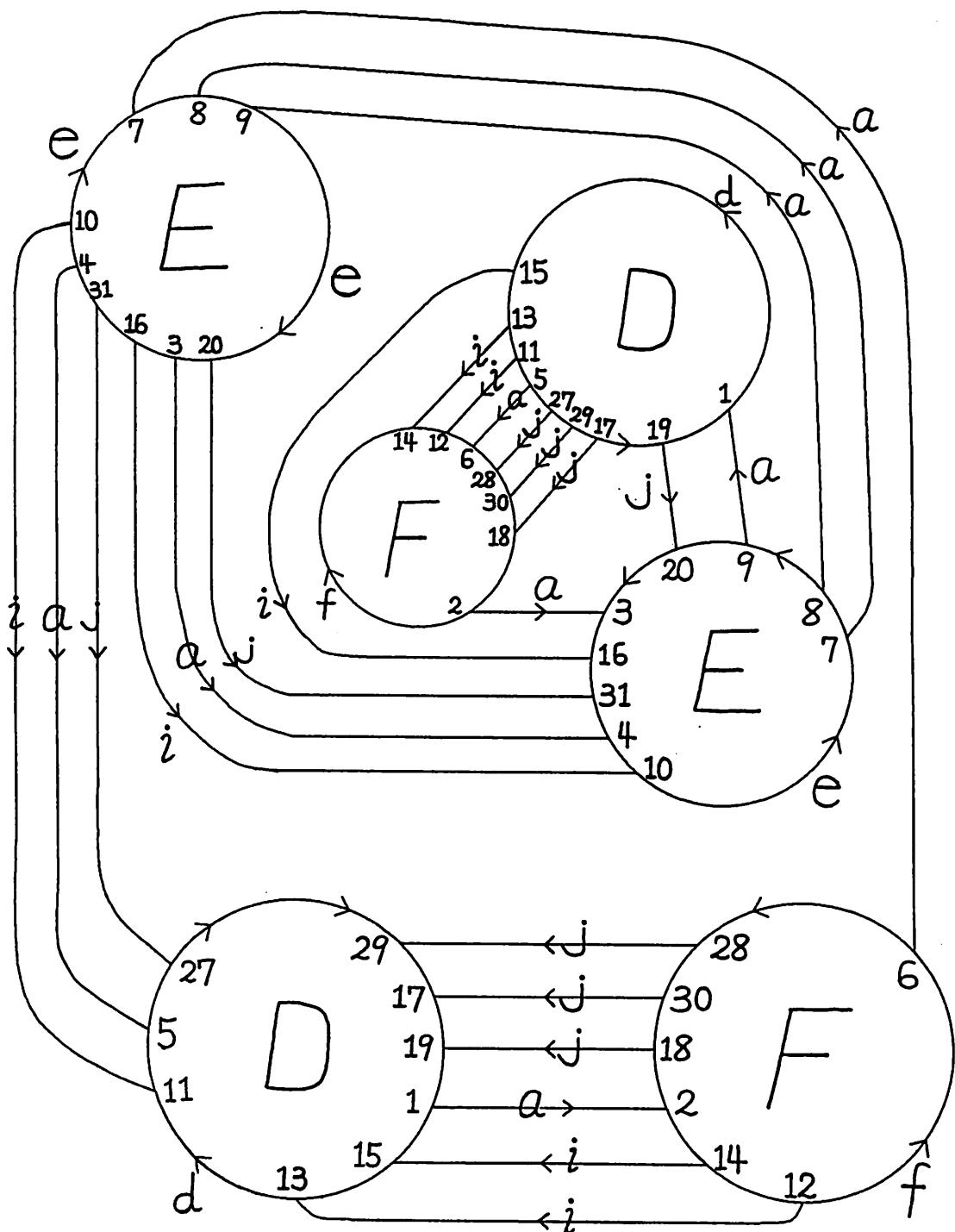
(135)

(U'; d, e, f)



(136)

(V'; a, i, j)

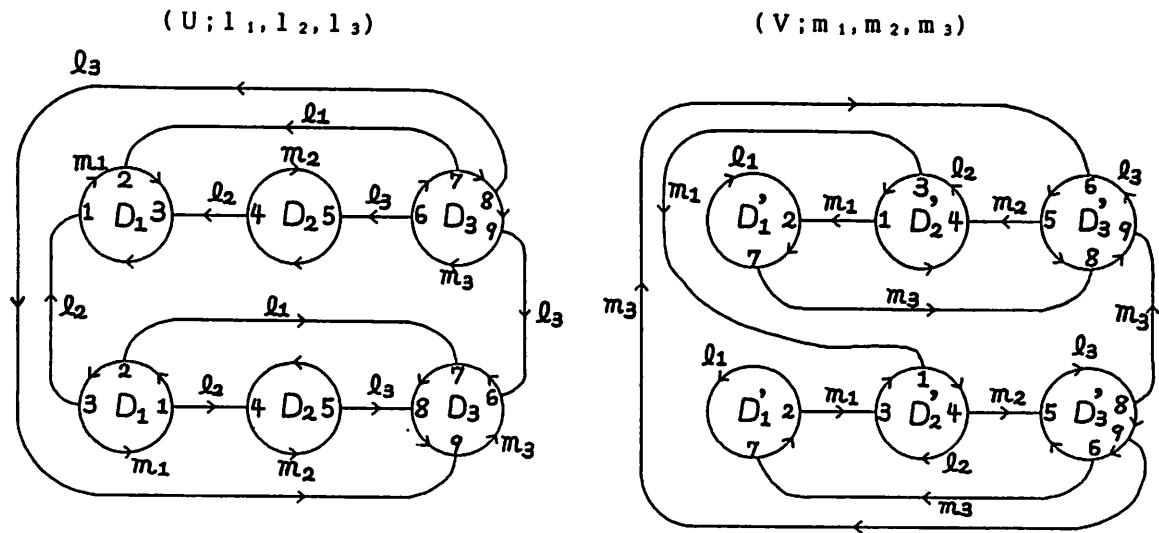


$$\pi_1 = \langle d, e, f \mid d^{-1}f^{-1}e^{-1}e^{-1}dfeee=1 \dots a(1), de^{-1}e^{-1}dfdfdf=1 \dots j(19) \rangle$$

(wave存在) $e^{-1}e^{-1}dfdf=1 \dots i(16)$

> (5')

例4. (O.Ja.Viro[11]) wave の存在しない S^3 の genus 3 の Heegaard diagrams



$(V; m_1, m_2, m_3)$ から得られる基本群は

$\pi_1 = \langle l_1, l_2, l_3 $	$l_2 l_1^{-1} l_2 = 1 \dots \textcircled{1} (\#_1 \text{ の読み (1:出発点)})$
(wave	$l_3 l_2^{-1} = 1 \dots \textcircled{2} (\#_2 \text{ の読み (5:出発点)})$
存在しない)	$l_3^{-1} l_3^{-1} l_1 l_3^{-1} = 1 \dots \textcircled{3} (\#_3 \text{ の読み (9:出発点)}) \rangle (1')$

である。①より $l_1 = l_2 l_2$ を得る。これを③の l_1 へ代入すると(2')の読みを得る。

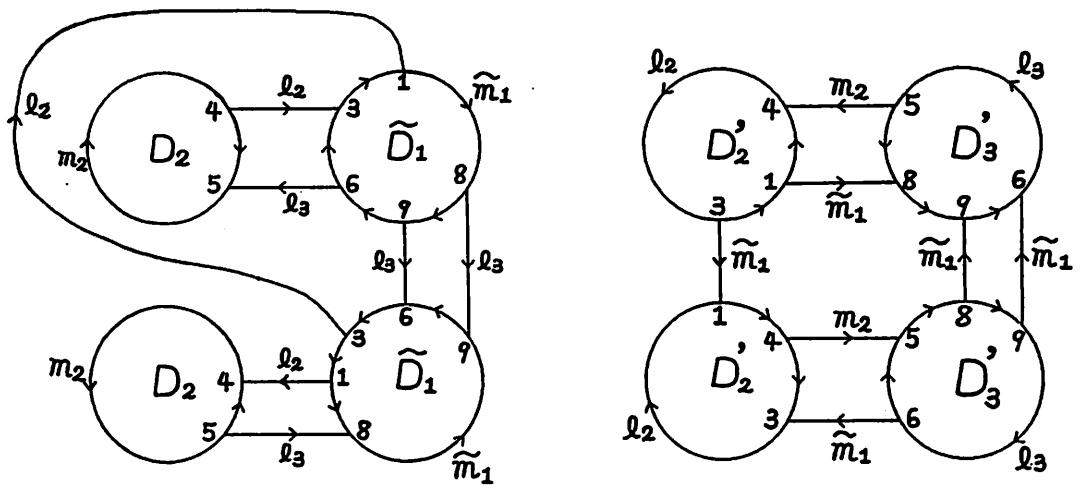
$$\pi_1 = \langle l_1, l_2, l_3 \mid l_3 l_2^{-1} = 1 \dots \textcircled{2} (\text{wave の読み (5:出発点)}) \\ (\text{wave 存在する}) \mid l_3^{-1} l_3^{-1} l_2 l_2 l_3^{-1} = 1 \dots \textcircled{1} + \textcircled{3} (\hat{m}_1 \text{ の読み (9:出発点)}) \rangle (2')$$

($U; l_1, l_2, l_3$) \cup ($V; m_1, m_2, m_3$)において、($V; m_1, m_2, m_3$)の disk D_1' の所で D_2^- -変形を行って得られた Heegaard diagrams を($U'; l_2, l_3$) \cup ($V'; \hat{m}_1, \hat{m}_2$)とする。
 (2')は($V'; \hat{m}_1, \hat{m}_2$)から得られる基本群の表示である。

(138)

$$(U'; l_2, l_3)$$

$$(V'; \tilde{m}_1, m_2)$$

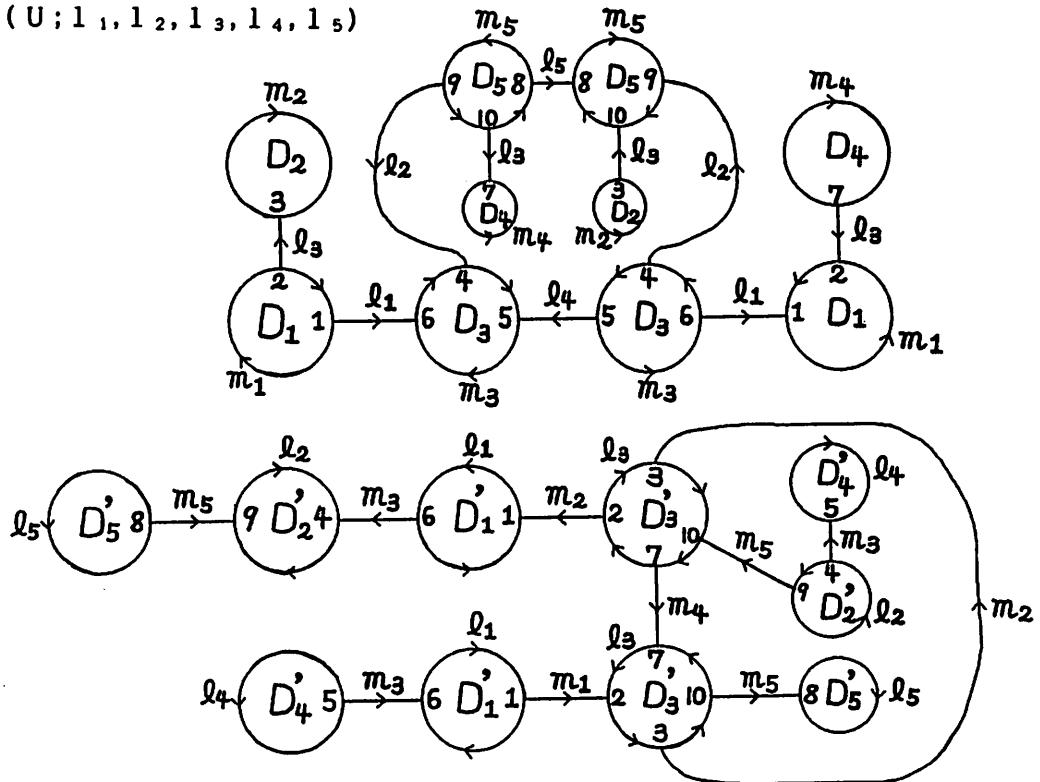


$$\pi_1 = \langle l_1, l_2, l_3 \mid l_3 l_2^{-1} = 1, \dots, \mathbb{m}_2(5), l_3^{-1} l_2^{-1} l_2 l_2 l_3^{-1} = 1, \dots, \hat{\mathbb{m}}_1(9) \rangle \langle 2' \dots (V'; \hat{\mathbb{m}}_1, \mathbb{m}_2) \rangle$$

wave存在.

例5. 連結な $S^2 \times S^1$ の genus 5 の Heegaard diagrams

$$(U; l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$$



$$(V; m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$$

$(U; l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$ から得られる基本群の表示は

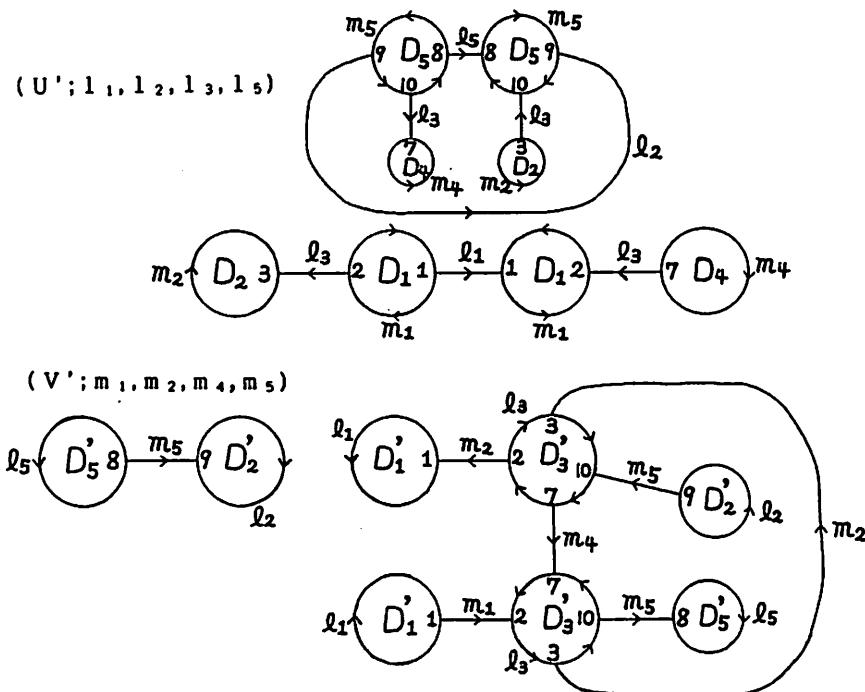
$$\pi_1 = \langle m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \mid \begin{array}{l} m_1 m_3^{-1} = 1 \cdots \textcircled{1} (l_1 \text{ の読み (1:出発点)}) \\ m_5 m_3^{-1} = 1 \cdots \textcircled{2} (l_2 \text{ の読み (9:出発点)}) \\ m_5 m_4^{-1} m_1 m_2^{-1} = 1 \cdots \textcircled{3} (l_3 \text{ の読み (10:出発点)}) \\ m_3 = 1 \cdots \textcircled{4} (l_4 \text{ の読み}) \\ m_5 = 1 \cdots \textcircled{5} (l_5 \text{ の読み}) \end{array} \rangle (1')$$

である。④の $m_3=1$ を①, ②の m_3^{-1} に代入すると、(2')の読みを得る。

$$\pi_1 = \langle m_1, m_2, m_4, m_5 \mid \begin{array}{l} m_1 = 1 \cdots \textcircled{1} (l_1 \text{ の読み (1:出発点)}) \\ m_5 = 1 \cdots \textcircled{2} (l_2 \text{ の読み (9:出発点)}) \\ m_5 m_4^{-1} m_1 m_2^{-1} = 1 \cdots \textcircled{3} (l_3 \text{ の読み (10:出発点)}) \\ m_5 = 1 \cdots \textcircled{5} (l_5 \text{ の読み}) \end{array} \rangle (2')$$

$(U; l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) \cup (V; m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ において、 $(U; l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$ の disk D_3 の所で D_3^{*-} -変形を行うと、 $(U'; l_1, l_2, l_3, l_5) \cup (V'; m_1, m_2, m_4, m_5)$ を得る。

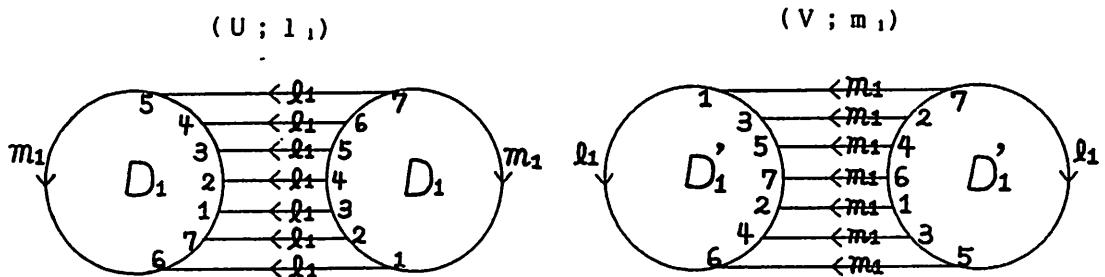
(2')は $(U'; l_1, l_2, l_3, l_5)$ から得られる基本群の表示である。



練習問題2. $(U; l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) \cup (V; m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \Rightarrow (U'; l_1, l_2, l_3, l_5) \cup (V'; m_1, m_2, m_4, m_5)$ の変換を行え。

(140)

例 6. $L(7,2)$ の genus 1 の Heegaard diagrams



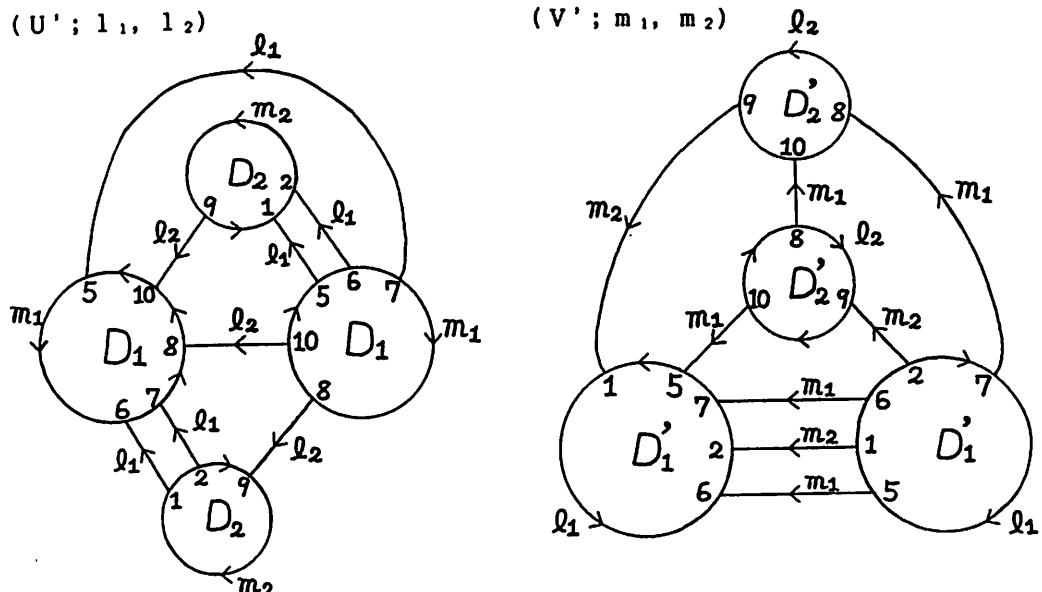
$(V; m_1)$ から得られる基本群の表示は

$$\pi_1 = \langle l_1 \mid l_1^{-1}l_1^{-1}l_1^{-1}l_1^{-1}l_1^{-1}l_1^{-1}l_1^{-1}l_1^{-1}=1 \dots \textcircled{1} (m_1 \text{ の読み (1:出発点)}) \rangle (1')$$

である。新しい生成元 l_2 と関係式 $l_2^{-1}l_1^{-1}l_1^{-1}l_1^{-1}=1$ を追加すると $(2')$ の読みを得る。

$$\pi_1 = \langle l_1, l_2 \mid \begin{array}{l} l_2 l_1^{-1}l_1^{-1}l_1^{-1}l_1^{-1}l_2=1 \dots \textcircled{1} (m_1 \text{ の読み (10:出発点)}) \\ l_2^{-1}l_1^{-1}l_1^{-1}l_1^{-1}=1 \dots \textcircled{2} (m_2 \text{ の読み (9:出発点)}) \end{array} \rangle (2')$$

$(U; l_1) \cup (V; m_1)$ において、 $(U; l_1)$ の $\{3l_1, 4l_1\}$ の所で D_4 -変形を行い、次に D_3^+ -変形を行うと Heegaard diagrams $(U'; l_1, l_2) \cup (V'; m_1, m_2)$ を得る。 $(2')$ は $(V'; m_1, m_2)$ から得られる基本群の表示である。



練習問題3. $(U; l_1) \cup (V; m_1) \Rightarrow (U'; l_1, l_2) \cup (V'; m_1, m_2)$ の変換を行え。

References

- [1] H. Ikeda & Y. Inoue : Invitation to DS-diagrams, Kobe J. Math., 2 (1985), 169 - 186.
- [2] I. Ishii : Flows and spines, Tokyo J. Math. vol. 9(1986), 505 - 525.
- [3] M. Yamashita : DS-diagram and Heegaard diagram(In Japanese), Reports on a meeting at R.I.M.S. Kyoto Univ., No. 636(1985), 28 - 41.
- [4] _____ : On elementary DS-deformations(In Japanese), Bulletin of Hakone Seminar, Low Dimensional PL Topology (1986), 13 - 34.
- [5] H. Ikeda & M. Yamashita & K. Yokoyama : Deformations of DS-diagrams, Topology and Computer Science, edited by S. Suzuki, Kinokuniya Company Ltd. Tokyo (1987), 81 - 138.
- [6] S. Horiguchi : Transformations of Heegaard diagrams(In Japanese), Bulletin of Hakone Seminar, Low Dimensional PL Topology (1990), 63 - 109.
- [7] _____ : Transformations of Heegaard diagrams by elementary DS-deformations, Journal of Aomori Univ. & Aomori Jr. Coll., vol. 14, No. 2(1991), 25 - 94.
- [8] T. Kaneto : On presentations of the fundamental group of the 3-sphere associated with Heegaard diagrams, J. Math. Soc. Japan, vol. 33, No. 1(1981), 147 - 158.
- [9] T. Homma & M. Ochiai & M. Takahashi : An algorithm for recognizing S^3 in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus two, Osaka J. Math. 17(1980), 625 - 648.
- [10] M. Ochiai : Constructions of 3-manifolds by computer and its treatments by graphics(In Japanese), Mathematical sciences., No. 256, 22 - 29., October 1984.
- [11] O. Ja. Viro : The Volodin-Kuznetsov-Fomenko conjecture on Heegaard diagrams is false, Uspehi Math. Nauk, 32 (1977), 175 - 176.
- [12] J. Hempel : 3-manifolds, Ann. of Math. Studies 86, Princeton Univ. Press. 1976

(142)

[13] H. Seifert & W. Threlfall : A Textbook of Topology, Translated by
M.A. Goldman, Academic Press, Inc. 1980

Shunzi Horiguchi

Faculty of economics

Niigata Sangyo University

4730 Karuigawa Kashiwazaki

Niigata 945-13

Japan