箱根セミナ記録 9 2 (1992) 55-87.

可付向閉3-多様体の基本群の変換

堀口 俊二（新潟産大・経済）

Contents

§1. Heegaard diagram とその細分 G(m,l)

以下断りのない限り，閉3-多様体 M^3 は連結可付向閉3-多様体を表す．

disjoint な 2つの2-球面 $S_1{}^2, S_2{}^2$ 上の 3-regular graph を $G_1=(V_1,E_1)$ $(G_1 \subset S_1{}^2)$, $G_2=(V_2,E_2)$ $(G_2 \subset S_2{}^2)$とする．ここで，V_1 (resp. V_2) は G_1 (resp. G_2) の vertices，E_1 (resp. E_2) は G_1 (resp. G_2) の edges の集合である． $S_1{}^2-|G_1|$ (resp. $S_2{}^2-|G_2|$) の connected components の closure の集合を F_1 (resp. F_2) とする．$S_1{}^2 \cup S_2{}^2$ 上の graph を $G=G_1 \cup G_2$ とし， $K_1=V_1 \cup E_1 \cup F_1$，$K_2=V_2 \cup E_2 \cup F_2$ とする．$K=K_1 \cup K_2$ が次の条件を満たすとする：

(1) $\{D_i{}^+, D_i{}^-\}$ $(\subset F_1)$(resp. $\{D_j{}'^+, D_j{}'^-\}$ $(\subset F_2)$)$(i,j=1,\cdots,n)$は同じ label D_i(resp. $D_j{}'$)が付いた向きが反対の 2-disks である． $\{f_i{}'\}$ $(\subset F_1)$， $\{f_i{}''\}$ $(\subset F_2)$$(i=1,\cdots,\alpha^2)$は同じ label f_i が付いた向きが反対の 2-disks か punctured 2-disk (穴あき 2-disk)である．

(2) 各 $\{\partial D_i{}^+, \partial D_i{}^-\}$ (resp. $\{\partial D_j{}'^+, \partial D_j{}'^-\}$)$(i,j=1,\cdots,n)$は 2つの circles であるが，これらは反対の向きを持ち，同じ label m_i (resp. l_j) で表わされている． $\partial D_i{}^+=m_i$ と $\partial D_i{}^-=m_i$ には同じ labels の付いた V_1 の vertices $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ があり，$\partial D_i{}^+=m_i$ と $\partial D_i{}^-=m_i$ は同じ labels のついた E の edges $\{i_1(m_i)i_2, i_2(m_i)i_3, \cdots, i_k(m_i)i_1\}$ により，$m_i=i_1(m_i)i_2(m_i)i_3\cdots i_k(m_i)i_1$ と分割される． ここで各 edge $i_j(m_i)i_{j+1}$ は $\partial D_i{}^+=m_i$ にある時は，$\partial D_i{}^+=m_i$ と同じ向きを持ち，$\partial D_i{}^-=m_i$ にある時は，$\partial D_i{}^-=m_i$ と同じ向きを持つ．そして $i_j(m_i)i_{j+1}$ の逆向きの

edge は $(i_j(m_i)i_{j+1})^{-1}=i_{j+1}(m_i^{-1})i_j$ と表される．
同様に $\partial D_j'^{+}=\partial D_j'^{-}=l_j$ は $l_j=j_1(l_j)j_2\cdots j_l(l_j)j_1$ と分割される．ただし，
$\cup_{j=1}^{n}\{j_1,j_2,\cdots,j_l\}=\cup_{i=1}^{n}\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ である．

(3) $G_1=\{\partial D_i^{+}=m_i=i_1(m_i)i_2(m_i)i_3\cdots i_k(m_i)i_1,\ \partial D_i^{-}=m_i=i_1(m_i)i_2(m_i)i_3\cdots i_k(m_i)i_1,$
$\{j_1(l_j)j_2,\cdots,j_l(l_j)j_1\}\}\ (i,j=1,\cdots,n)$
$G_2=\{\partial D_j'^{+}=l_j=j_1(l_j)j_2\cdots j_l(l_j)j_1,\ \partial D_j'^{-}=l_j=j_1(l_j)j_2\cdots j_l(l_j)j_1,$
$\{i_1(m_i)i_2,\cdots,i_k(m_i)i_1\}\}\ (i,j=1,\cdots,n)$
である．

(4) 同じ label の2つの面の貼合わせと，それらの boundaries 上の同じ label の vertices および edges どうしの貼合わせは，vertices および edges の labels および各 edge の向きも含めて，面の貼合わせと compatible である．

定義1． (1) から (4) の条件を満たす planar 3-regular graphs G_1,G_2 をそれぞれ genus n の Heegaard diagram の細分または cut diagram といい，$G(m,l)$，$G(l,m)$ と記述される．$G(m,l)\cup G(l,m)$ は Heegaard diagrams の細分の対と呼ばれる．

2つの disjoint な 3-balls を B_1^3,B_2^3 とし，$\partial B_1^3=S_1^2,\partial B_2^3=S_2^2$ とする．S_1^2,S_2^2 上の genus n の Heegaard diagrams の細分をそれぞれ $G(m,l),G(l,m)$ とする．$K_1=V_1\cup E_1\cup F_1$ の 2-disks D_i^{+} と $D_i^{-}(i=1,\cdots,n)$を貼り合わせると，genus n の handlebody H_1 になる．D_i^{+} と D_i^{-} は同一視されて H_1 の proper disk になる．これを D_i で表す．同様に B_2^3から genus n の handlebody H_2 が構成される．そして $\{D_j'\}$ $(j=1,\cdots,n)$ は H_2 の proper disks となる．つぎに ∂H_1 の f_i' と ∂H_2 上の f_i'' を貼り合わせると連結可付向閉3-多様体 M^3 が得られる．∂H_1 の f_i' と ∂H_2 上の f_i'' を同一視する同相写像を $f:\partial H_1\to\partial H_2$ とする．

定義2． 4つの組 $(M^3;H_1,H_2,f)$ を f に関する Heegaard splitting と呼ぶ．逆に連結可付向閉3-多様体 M^3 は，M^3 に含まれる 2つの genus n(≧0)の handlebodies H_1,H_2 の和 ；$M^3=H_1\cup H_2$，$H_1\cap H_2=\partial H_1\cap\partial H_2=F$(genus n の閉曲面) と表わされる．$(U,V;F)$ を M^3 の genus n の Heegaard splitting といい，F を Heegaard surface と呼ぶ．

定義3． $(H_1,H_2;F)$(resp. $(M^3;H_1,H_2,f)$) を M^3 の genus n Heegaard splitting とする．H_1,H_2 の meridian・disk 系をそれぞれ $\{D_1,\cdots,D_n\}$，$\{D_1',\cdots,D_n'\}$ とする．$(H_1;\partial D_1',$

$\cdots,\partial D_n')$(resp. $(H_1;f^{-1}(\partial D_1'),\cdots,f^{-1}(\partial D_n'))$) あるいは $(H_2;\partial D_1,\cdots,\partial D_n)$(resp. $(H_2;f(\partial D_1),\cdots,f(\partial D_n))$) を Heegaard splitting $(H_1,H_2;F)$(resp. $(M^3;H_1,H_2,f)$) の genus n Heegaard diagram とよぶ．また $\{\partial D_1',\cdots,\partial D_n'\}$ (resp. $\{f^{-1}(\partial D_1'),\cdots,f^{-1}(\partial D_n')\}$ を longitude 系と呼ぶ．

$(M^3;H_1,H_2,f)$ において，$f^{-1}(H_2)$ を再び H_2 におきかえて，f^{-1} を恒等写像とみなせるから，Heegaard diagram $(H_1;f^{-1}(\partial D_1'),\cdots,f^{-1}(\partial D_n'))$ の $\{f^{-1}(\partial D_1'),\cdots,f^{-1}(\partial D_n')\}$ は H_2 の meridian 系 と考えてよい．

Heegaard diagram $(H_1;\partial D_1',\cdots,\partial D_n')$ が与えられたとき，H_1 の meridian disks $\{D_1,\cdots,D_n\}$ で H_1 を切ることにより，$G(m,l)$ が得られる．

定義４． genus n Heegaard diagram $(H_1;\partial D_1',\cdots,\partial D_n')$ において，$\{D_1\cup\cdots\cup D_n\}\cap\{D_1'\cup\cdots\cup D_n'\}=\{\partial D_1\cup\cdots\cup\partial D_n\}\cap\{\partial D_1'\cup\cdots\cup\partial D_n'\}$ は，points であるが，この points の数を Heegaard diagram の交点数とよぶ．

定義５． $G(m,l)$ の edges $\{j_1(l_j)j_2,\cdots,j_l(l_j)j_1\}$ $(j=1,\cdots,n(\geq 2))$の中から n-1 個の edges を選んできて，H_1 の meridian disks $\{D_1,\cdots,D_n\}$ が連結となるとき，Heegaard diagram $(H_1;l_1,\cdots,l_n)$ は $\{D_1,\cdots,D_n\}$ に関して連結であるという．また 連結とするように選べないとき，$(H_1;l_1,\cdots,l_n)$ は $\{D_1,\cdots,D_n\}$ に関して非連結であるという．genus 1 の Heegaard diagram を持つ連結可付向閉3-多様体 M^3 は S^3, Lens space $L(p,q)$, $S^2\times S^1$ であるが，このうち S^3 と $L(p,q)$ の Heegaard diagram は連結と定義する．$S^2\times S^1$ の Heegaard diagram は非連結と定義する．

定義６． $G(m,l)$ (または $G(l,m)$) は定義1 の表示とする． $\{f_i',f_i''\}$ $(i=1,\cdots,\alpha^2)$は 2-disks となるとき，$G(m,l)$ は $\{D_1,\cdots,D_n\}$ に関して連結という．連結にならないとき，$\{D_1,\cdots,D_n\}$ に関して非連結という．

$G(m,l)$ が連結ならば Heegaard diagram $(H_1;l_1,\cdots,l_n)$ は連結である．しかしこの逆が成り立たない例が存在する[6]．Heegaard genus = 1 のときには $(H_1;l_1)$ が連結ということと，$G(m,l)$ が連結ということとは同義である．

$G(m,l)$ は連結とし定義1の表示とする．$\partial f_i'$ $(f_i'\subset F_1)$ は circle である．この circle を正の向きに回るとき，この circle 上の edges の labels を $i_j(m_i)i_{j+1}$ or $(i_j(m_i)i_{j+1})^{-1}$, $j_l(l_j)j_{l+1}$ or $(j_l(l_j)j_{l+1})^{-1}$ と続けて読んだ語(word)を r_i とする．

読み始める最初の edge の label は任意に選ばれる.

定義7. $HG(m,l)=\{r_k,\ i_1(m_i)i_2(m_i)i_3\cdot\cdots\cdot i_k(m_i)i_1,\ j_1(l_j)j_2\cdot\cdots\cdot j_l(l_j)j_1\}$
$(k=1,\cdots,\alpha^2,\ i,j=1,\cdots,n)$
を連結な細分 $G(m,l)$ の vertices, edges の labels による表示と呼ぶ.

$G(m,l)$ が非連結なとき, S_1^2 上の一つの面は punctured 2-disk である. この punctured 2-disk に付けられた label を f_u とすると, ∂f_u は数個の circles となる. 各 circle を正の向きに読んだ語を $r_1',\cdots,r_s'$ とする. ∂f_u から得られる語を $\cup_{j=1}^{s}(r_j')$ とまとめて表す.

定義8. $HG(m,l)=\{r_i,\ \cup_{j=1}^{s}(r_j'),\ i_1(m_i)i_2(m_i)i_3\cdot\cdots\cdot i_k(m_i)i_1,$
$j_1(l_j)j_2\cdot\cdots\cdot j_l(l_j)j_1\}\quad(i=1,\cdots,\alpha^2\text{-}s,\ i,j=1,\cdots,n)$
を非連結な細分 $G(m,l)$ の vertices, edges の labels による表示と呼ぶ.

$G(l,m)$ の各 $\partial f_i''$ を負の向きに回ることにより, 同じ labels による表示が得られるから, 表示 $HG(m,l)$ は well-defined である. $G(m,l)$ の連結性と $HG(m,l)$ の連結性とは同義である.

例1. S^3 の連結な genus 2 の $HG(m,l)$

$$HG=\left\{\begin{array}{llll}
1l_2{}^{-1}3m_1{}^{-1}2l_17m_11 & (1) & 2m_1{}^{-1}1l_26m_17l_1{}^{-1}2 & (2)\\
1m_1{}^{-1}7l_15m_16l_2{}^{-1}1 & (3) & 7m_1{}^{-1}6l_24m_15l_1{}^{-1}7 & (4)\\
2m_13l_2{}^{-1}12m_2{}^{-1}11l_12 & (5) & 5l_19m_210l_2{}^{-1}8m_2{}^{-1}12l_23m_14l_2{}^{-1}6m_1{}^{-1}5 & (6)\\
5m_1{}^{-1}4l_28m_29l_1{}^{-1}5 & (7) & 10m_211l_1{}^{-1}9m_2{}^{-1}8l_210 & (8)\\
9l_111m_212l_2{}^{-1}10m_2{}^{-1}9 & (9) & 3m_14l_28m_2{}^{-1}12l_2{}^{-1}10m_211l_12m_1{}^{-1}1l_2{}^{-1}3 & (10)\\
1m_12m_13m_14m_15m_16m_17m_11 & (11) & 8m_29m_210m_211m_212m_28 & (12)\\
9l_111l_12l_17l_15l_19 & (13) & 10l_212l_23l_21l_26l_24l_28l_210 & (14)
\end{array}\right\}$$

$HG(m,l)$ には, 一つの edge の label が向きを除いて三つあり, 一つの vertex の label は六つある.

例２． L(7,2)#L(7,4) の非連結な genus 2 の HG(m,l)

$$HG(m,l)=\left\{\begin{array}{llll} 1m_1 2 l_1{}^{-1} 7 m_1{}^{-1} 6 l_1 1 & (1) & 2m_1 3 l_1{}^{-1} 1 m_1{}^{-1} 7 l_1 2 & (2) \\ 3m_1 4 l_1{}^{-1} 2 m_1{}^{-1} 1 l_1 3 & (3) & 4m_1 5 l_1{}^{-1} 3 m_1{}^{-1} 2 l_1 4 & (4) \\ 5m_1 6 l_1{}^{-1} 4 m_1{}^{-1} 3 l_1 5 & (5) & 6m_1 7 l_1{}^{-1} 5 m_1{}^{-1} 4 l_1 6 & (6) \\ 12m_2 13 l_2{}^{-1} 9 m_2{}^{-1} 8 l_2 12 & (7) & 13m_2 14 l_2{}^{-1} 10 m_2{}^{-1} 9 l_2 13 & (8) \\ 14m_2 8 l_2{}^{-1} 11 m_2{}^{-1} 10 l_2 14 & (9) & 8m_2 9 l_2{}^{-1} 12 m_2{}^{-1} 11 l_2 8 & (10) \\ 9m_2 10 l_2{}^{-1} 13 m_2{}^{-1} 12 l_2 9 & (11) & 10m_2 11 l_2{}^{-1} 14 m_2{}^{-1} 13 l_2 10 & (12) \\ \multicolumn{3}{l}{(1m_1{}^{-1} 7 l_1{}^{-1} 5 m_1 6 l_1 1) \cup (12 m_2{}^{-1} 11 l_2{}^{-1} 14 m_2 8 l_2 12)} & (13) \\ 1m_1 2m_1 3m_1 4m_1 5m_1 6m_1 7m_1 1 & (14) & & \\ 8m_2 9m_2 10m_2 11m_2 12m_2 13m_2 14m_2 8 & (15) & & \\ 6 l_1 1 l_1 3 l_1 5 l_1 7 l_1 2 l_1 4 l_1 6 & (16) & & \\ 8 l_2 12 l_2 9 l_2 13 l_2 10 l_2 14 l_2 11 l_2 8 & (17) & & \end{array}\right\}$$

HG(m,l) が与えられると，これから G(m,l)(または G(l,m)) を次のようにして描くことができる．ただし，HG(m,l) は S^3 の genus 1 の場合を除き連結とする．

G(m,l) の描き方

STEP 1　HG(m,l) のある r_i を選んでこれを描く．

STEP 2　r_i に含まれる $i_j(m_i)i_{j+1}$ or $(i_j(m_i)i_{j+1})^{-1}$ を持つ meridians m_i を全て描く．

STEP 3　$r_j \cap r_i=\{edge(s)\}(j\neq i)$となる r_j を描く．

STEP 4　r_j に含まれる $j_i(m_j)j_{i+1}$ or $(j_i(m_j)j_{i+1})^{-1}$ を持つ meridians m_j が存在すれば，これを全て描く．

STEP 5　以下 step 1 から step 4 までを繰り返し，HG(m,l) の異なる全ての r_i，m_i を描く．

練習問題　例1の HG(m,l) から G(m,l) を描け．

非連結な G(m,l) も HG(m,l) から上記 step 1～step 5 と同様な方法で描くことができる．

練習問題　例2の HG(m,l) から G(m,l) を描け．

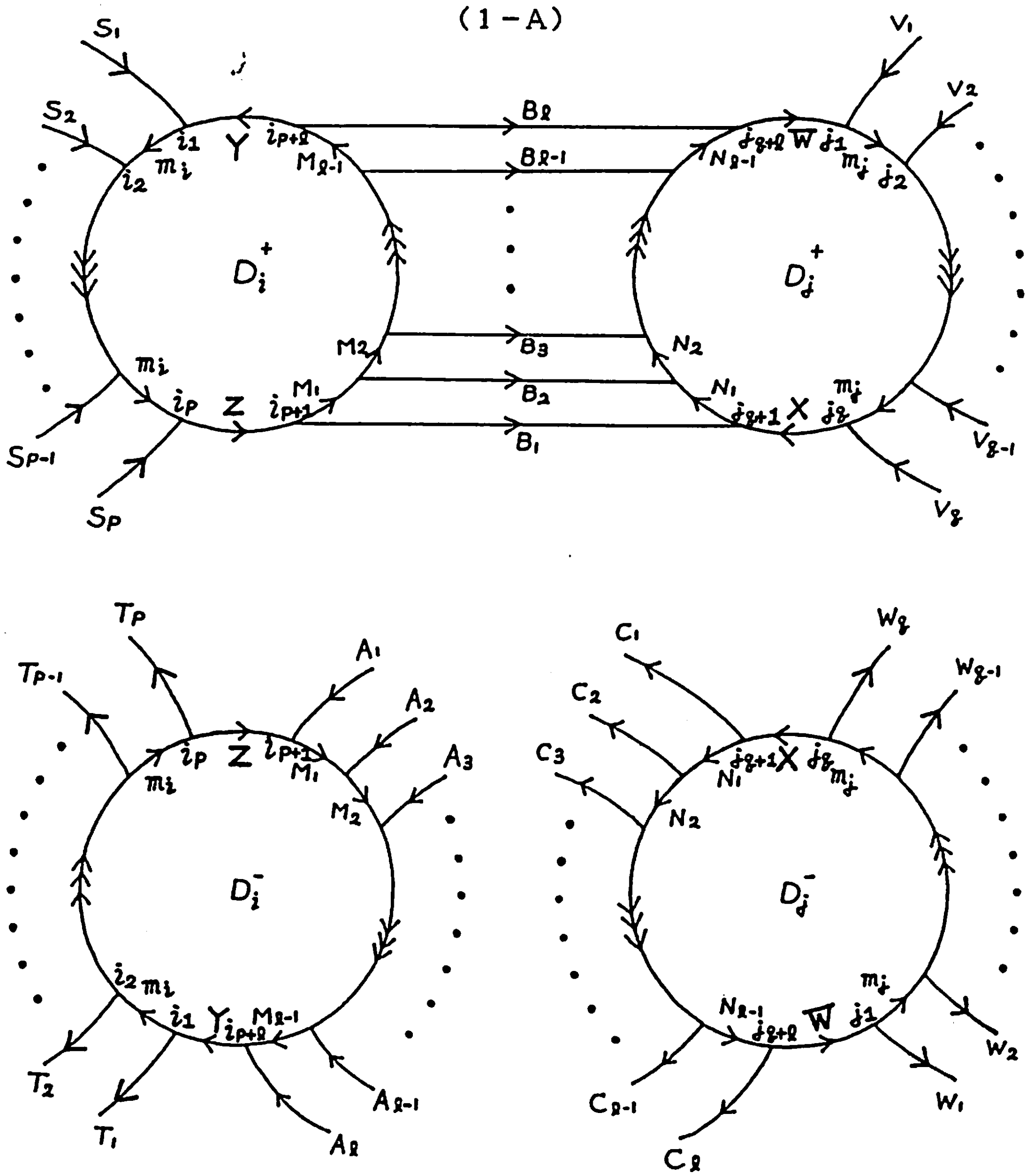
非連結な G(m,l) が与えられたとき，初等DS-変形を使ってこれを連結な G(m,l) に変換できる．

§2. G（m，l）の labels 表示 HG（m，l）の変換

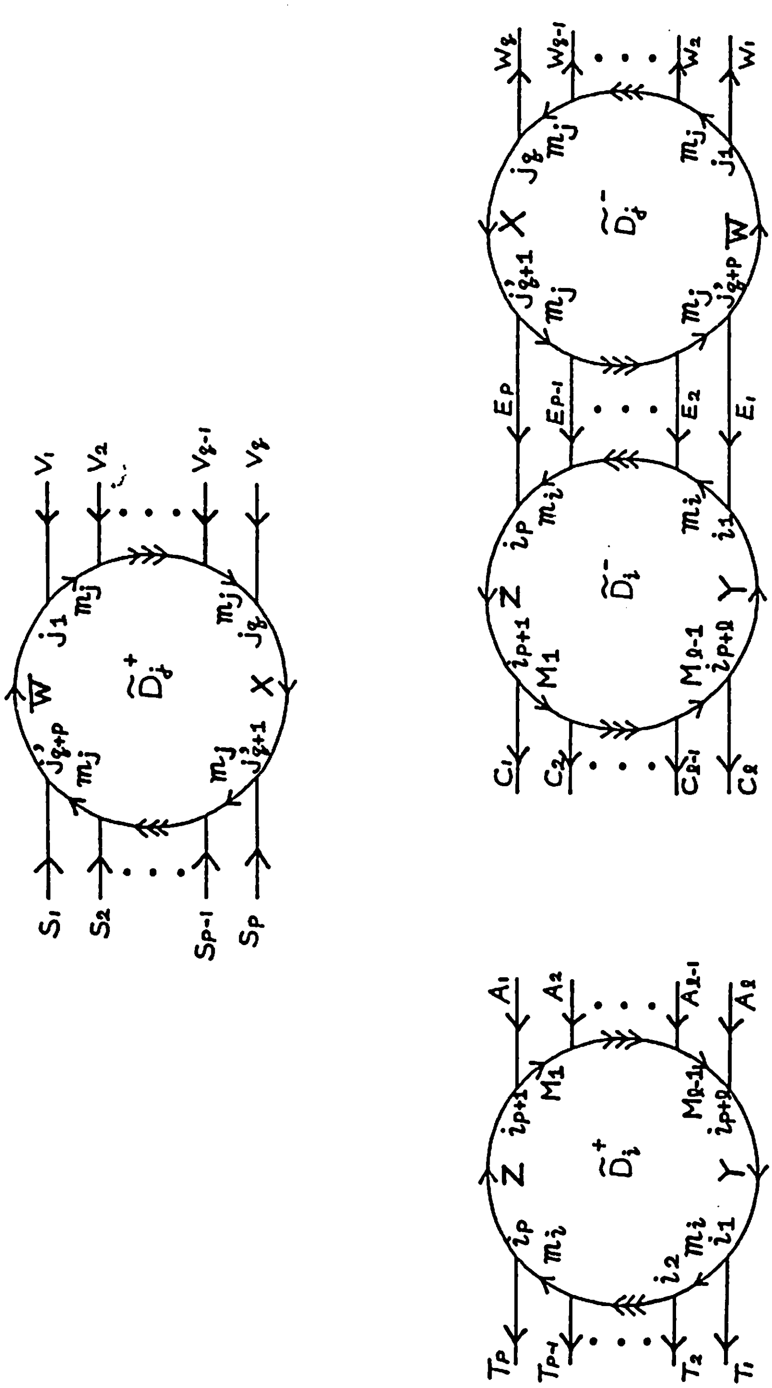
[5] において G(m,l) の移り変わり(変換)を与えたが，これらの変換に対応する G(m,l) の labels 表示 HG(m,l) の変換の algorithms を与える．ただし，G(m,l) は連結とする．

1．(1) Heegaard diagrams の変換 (1-A)⇔(1-B1)(次図)に対応する labels の変換

（1－A）



(1－B1)



(1-A) の部分を持つ Heegaard diagram の labels 表示を HG1 とする．(1-B1) の部分を持つ Heegaard diagram の labels 表示を HG1’ とする．

HG1 =

W1	$\cdots(V_q)j_q(X)j_{q+1}(B_1^{-1})i_{p+1}(Z^{-1})i_p(S_p^{-1})\cdots$	(1)
	$j_{q+1}(N_1)j_{q+2}(B_2^{-1})i_{p+2}(M_1^{-1})i_{p+1}(B_1)j_{q+1}$	(2)
	$\vdots$	
	$j_{q+l-1}(N_{l-1})j_{q+l}(B_l^{-1})i_{p+l}(M_{l-1}^{-1})i_{p+l-1}(B_{l-1})j_{q+l-1}$	(l)
	$\cdots(S_1)i_1(Y^{-1})i_{p+l}(B_l)j_{q+l}(W)j_1(V_1^{-1})\cdots$	(l+1)
	$\cdots(S_2)i_2(m_l^{-1})i_1(S_1^{-1})\cdots$	(l+2)
	$\vdots$	
	$\cdots(S_p)i_p(m_l^{-1})i_{p-1}(S_{p-1}^{-1})\cdots$	(l+p)
W2	$\cdots(T_p^{-1})i_p(Z)i_{p+1}(A_1^{-1})\cdots$	(1)
	$\cdots(A_l)i_{p+l}(Y)i_1(T_1)\cdots$	(2)
W3	$\cdots(C_1^{-1})j_{q+1}(X^{-1})j_q(W_q)\cdots$	(1)
	$\cdots(C_2^{-1})j_{q+2}(N_1^{-1})j_{q+1}(C_1)\cdots$	(2)
	$\vdots$	
	$\cdots(C_l^{-1})j_{q+l}(N_{l-1}^{-1})j_{q+l-1}(C_{l-1})\cdots$	(l)
	$\cdots(W_1^{-1})j_1(W^{-1})j_{q+l}(C_l)\cdots$	(l+1)
W4	r_k (W1〜W3 以外の words)	

M	$i_1(m_i)i_2\cdot\cdots\cdot i_p(Z)i_{p+1}(M_1)i_{p+2}\cdot\cdots\cdot i_{p+l-1}(M_{l-1})i_{p+l}(Y)i_1$	(1)
	$j_1(m_j)j_2\cdot\cdots\cdot j_q(X)j_{q+1}(N_1)j_{q+2}\cdot\cdots\cdot j_{q+l-1}(N_{l-1})j_{q+l}(W)j_1$	(2)
	$k_1(m_k)k_2\cdot\cdots\cdot k_u(m_k)k_1$ $(k\neq i,j)$	(3)
L1	$l_{r1}=\cdots(A_1)i_{p+1}(B_1)j_{q+1}(C_1)\cdots$	(1)
	$\vdots$	
	$l_{rl}=\cdots(A_l)i_{p+l}(B_l)j_{q+l}(C_l)\cdots$	(l)
L2	$l_{s1}=\cdots(V_1)j_1(W_1)\cdots$	(1)
	$\vdots$	
	$l_{sq}=\cdots(V_q)j_q(W_q)\cdots$	(q)
L3	$l_{t1}=\cdots(S_1)i_1(T_1)\cdots$	(1)
	$\vdots$	
	$l_{tp}=\cdots(S_p)i_p(T_p)\cdots$	(p)
L4	$l_u=u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1$ (L1〜L3 以外の longitudes)	

$HG1' =$

W1'	$\cdots(V_q)j_q(X)j_{q+1}'(S_p^{-1})\cdots$	(1)
	$\cdots(S_1)j_{q+p}'(W)j_1(V_1^{-1})\cdots$	(l+1)
	$\cdots(S_2)j_{q+p-1}'(m_j)j_{q+p}'(S_1^{-1})\cdots$	(l+2)
	$\vdots$	
	$\cdots(S_p)j_{q+1}'(m_j)j_{q+2}'(S_{p-1}^{-1})\cdots$	(l+p)
W2	$\cdots(T_p^{-1})i_p(Z)i_{p+1}(A_1^{-1})\cdots$	(1)
	$\cdots(A_l)i_{p+l}(Y)i_1(T_1)\cdots$	(2)
W3'	$\cdots(C_1^{-1})i_{p+1}(Z^{-1})i_p(E_p^{-1})j_{q+1}'(X^{-1})j_q(W_q)\cdots$	(1)
	$\cdots(C_2^{-1})i_{p+2}(M_1^{-1})i_{p+1}(C_1)\cdots$	(2)
	$\vdots$	
	$\cdots(C_l^{-1})i_{p+l}(M_{l-1}^{-1})i_{p+l-1}(C_{l-1})\cdots$	(l)
	$j_{q+1}'(E_p)i_p(m_i^{-1})i_{p-1}(E_{p-1}^{-1})j_{q+2}'(m_j^{-1})j_{q+1}'$	(l+2)
	$\vdots$	
	$j_{q+p-1}'(E_2)i_2(m_i^{-1})i_1(E_1^{-1})j_{q+p}'(m_j^{-1})j_{q+p-1}'$	(l+p)
	$\cdots(W_1^{-1})j_1(W^{-1})j_{q+p}'(E_1)i_1(Y^{-1})i_{p+l}(C_l)\cdots$	(l+1)
W4	r_k (W1',W2,W3' 以外の words)	
M'	$i_1(m_i)i_2\cdot\cdots\cdot i_p(Z)i_{p+1}(M_1)i_{p+2}\cdot\cdots\cdot i_{p+l-1}(M_{l-1})i_{p+l}(Y)i_1$	(1)
	$j_1(m_j)j_2\cdot\cdots\cdot j_q(X)j_{q+1}'(m_j)j_{q+2}'\cdot\cdots\cdot j_{q+p-1}'(m_j)j_{q+p}'(W)j_1$	(2)
	$k_1(m_k)k_2\cdot\cdots\cdot k_u(m_k)k_1\ (k\neq i,j)$	(3)
L1'	$l_{r1}' = \cdots(A_1)i_{p+1}(C_1)\cdots$	(1)
	$\vdots$	
	$l_{rl}' = \cdots(A_l)i_{p+1}(C_l)\cdots$	(l)
L2	$l_{s1} = \cdots(V_1)j_1(W_1)\cdots$	(1)
	$\vdots$	
	$l_{sq} = \cdots(V_q)j_q(W_q)\cdots$	(q)
L3'	$l_{t1}' = \cdots(S_1)j_{q+p}'(E_1)i_1(T_1)\cdots$	(1)
	$\vdots$	
	$l_{tp}' = \cdots(S_p)j_{q+1}'(E_p)i_p(T_p)\cdots$	(p)
L4	$l_u = u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1$ (L1',L2,L3' 以外の longitudes)	

定理1． HG1⇔HG1' の labels の変換の algorithms が存在する．

証明 HG1⇒HG1' の algorithms を与える．

HG1 に W1 の(2)から(l)のような部分があれば，HG1 に以下の操作を行う．

STEP 1 M の(2)の $j_{q+1}(N_1)j_{q+2}\cdots j_{q+l-1}(N_{l-1})j_{q+l}$ を新しい labels の列 $j_{q+1}'(m_J)j_{q+2}'\cdots j_{q+p-1}'(m_J)j_{q+p}'$ に置き換える．

この操作を次のように表す．

M (2) $j_{q+1}(N_1)j_{q+2}\cdots j_{q+l-1}(N_{l-1})j_{q+l} \to j_{q+1}'(m_J)j_{q+2}'\cdots j_{q+p-1}'(m_J)j_{q+p}'$

この操作により，HG1' の W1' の(2)を得る．

STEP 2 W1 の(1)の中の文字列 $j_{q+1}(B_1^{-1})i_{p+1}(Z^{-1})$ を消去して前後の文字列を連結する．この操作を W1 (1) (-) $j_{q+1}(B_1^{-1})i_{p+1}(Z^{-1})$ と表す．

この結果 $\cdots(V_q)j_q(X)i_p(S_p^{-1})\cdots$ ができる．次にこの文字列に対して，$i_p \to j_{q+1}'$ を行うと' HG1' の W1' の(1)の $\cdots(V_q)j_q(X)j_{q+1}'(S_p^{-1})\cdots$ を得る．

同様に(l)に対して (l) (-) $(Y^{-1})i_{p+1}(B_1)j_{q+1}$ と $i_1 \to j_{q+p}'$ を行うと HG1' の W1' の(l+1)の $\cdots(S_1)j_{q+p}'(W)j_1(V_1^{-1})\cdots$ を得る．

次に

$$
\begin{cases}
(2) & (-)((2)\text{を消去}) \\
(3) & (-) \\
 & \vdots \\
(l) & (-)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
(l+2) & i_2(m_1^{-1})i_1 \to j_{q+p-1}'(m_J)j_{q+p}' \\
(l+3) & i_3(m_1^{-1})i_2 \to j_{q+p-2}'(m_J)j_{q+p-1}' \\
 & \vdots \\
(l+p) & i_p(m_1^{-1})i_{p-1} \to j_{q+1}'(m_J)j_{q+2}'
\end{cases}
$$

を行うと，HG1' の W1' の(l+2)〜(l+p)を得る．

STEP 3 L3

$$
\begin{cases}
(1) & (S_1)i_1(T_1) \to (S_1)\underline{j_{q+p}'(E_1)}i_1(T_1)((S_1)\text{ と } i_1 \text{ の間に } j_{q+p}'(E_1) \text{ を挿入}) \\
(2) & (S_2)i_2(T_2) \to (S_2)\underline{j_{q+p-1}'(E_2)}i_2(T_2) \\
 & \vdots \\
(p) & (S_p)i_p(T_p) \to (S_p)\underline{j_{q+1}'(E_p)}i_p(T_p)
\end{cases}
$$

を行うと，HG1' の L3' を得る．

STEP 4　L1 (1) (-)　$(B_1)j_{q+1}$

$\vdots$

(l) (-)　$(B_1)j_{q+1}$

を行うと，HG1’ の L1’ を得る．

STEP 5　W3 (2)　$j_{q+2}(N_1{}^{-1})j_{q+1} \rightarrow i_{p+2}(M_1{}^{-1})i_{p+1}$

(3)　$j_{q+3}(N_2{}^{-1})j_{q+2} \rightarrow i_{p+3}(M_2{}^{-1})i_{p+2}$

$\vdots$

(l)　$j_{q+l}(N_{l-1}{}^{-1})j_{q+l-1} \rightarrow i_{p+l}(M_{l-1}{}^{-1})i_{p+l-1}$

を行うと，HG1’ の W3’ の(2)～(l)を得る．

STEP 6　W3

$$\begin{cases} (+)\ (1)\ j_{q+1}'(E_p)i_p(m_1{}^{-1})i_{p-1}(E_{p-1}{}^{-1})j_{q+2}'(m_j{}^{-1})j_{q+1}' & \text{（文字列追加）} \\ (+)\ (2)\ j_{q+2}'(E_{p-1})i_{p-1}(m_1{}^{-1})i_{p-2}(E_{p-2}{}^{-1})j_{q+3}'(m_j{}^{-1})j_{q+2}' & \\ \vdots & \\ (+)\ (p-1)\ j_{q+p-1}'(E_2)i_2(m_1{}^{-1})i_1(E_1{}^{-1})j_{q+p}'(m_j{}^{-1})j_{q+p-1}' & \end{cases}$$

(1)　$j_{q+1} \rightarrow i_{p+1}(Z^{-1})i_p(E_p{}^{-1})j_{q+1}'$

(l+1) $j_{q+l} \rightarrow j_{q+p}'(E_1)i_1(Y^{-1})i_{p+l}$

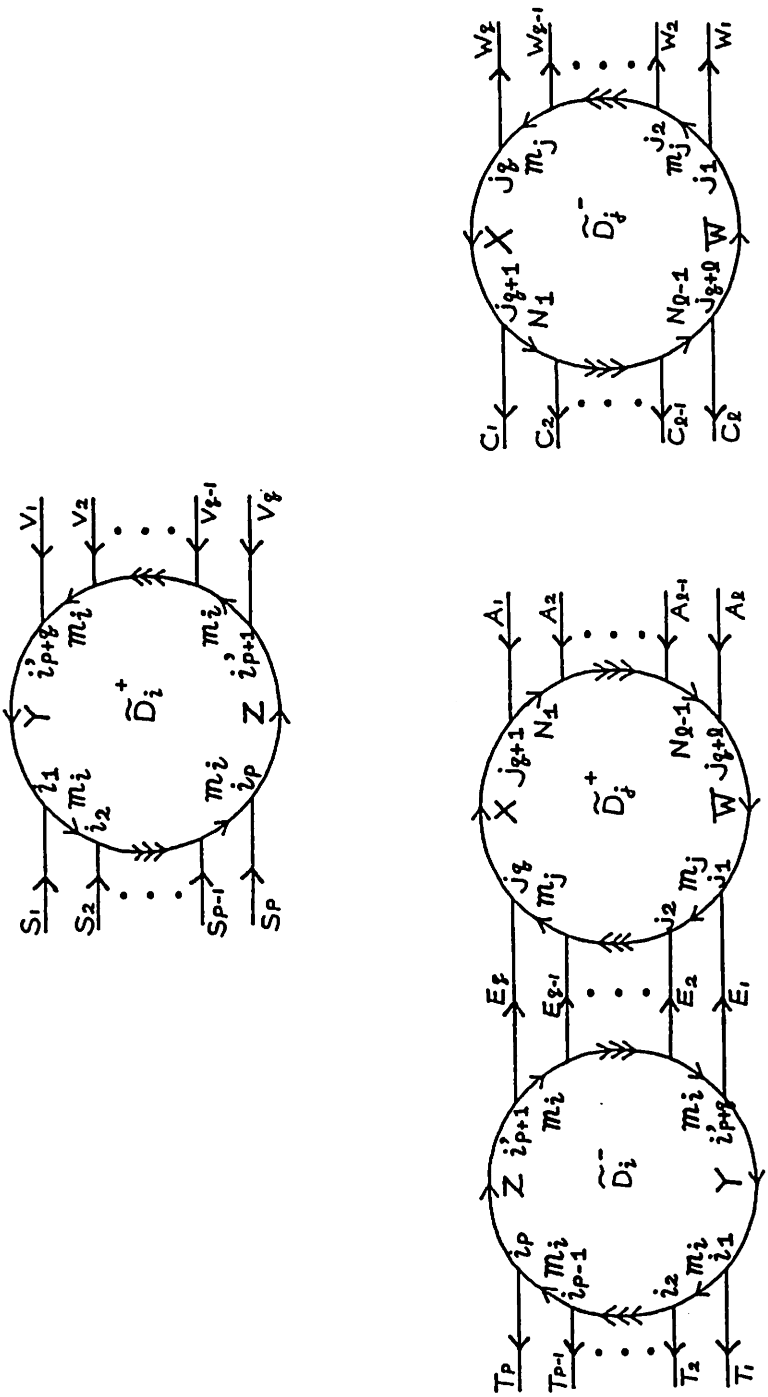
を行うと，HG1’ の W3’ の(l+2)～(l+p)および(1),(l+1)を得る．

以上の操作で HG1⇒HG1’ が得られた．

逆変換 HG1’⇒HG1 の algorithms も 上記 step 1 から step 6 までの過程と全く同様にして得られる．　□

定義８．　step 1 から step 6 のように次々に labels を換えていく操作を labels の連鎖反応と呼ぶ．

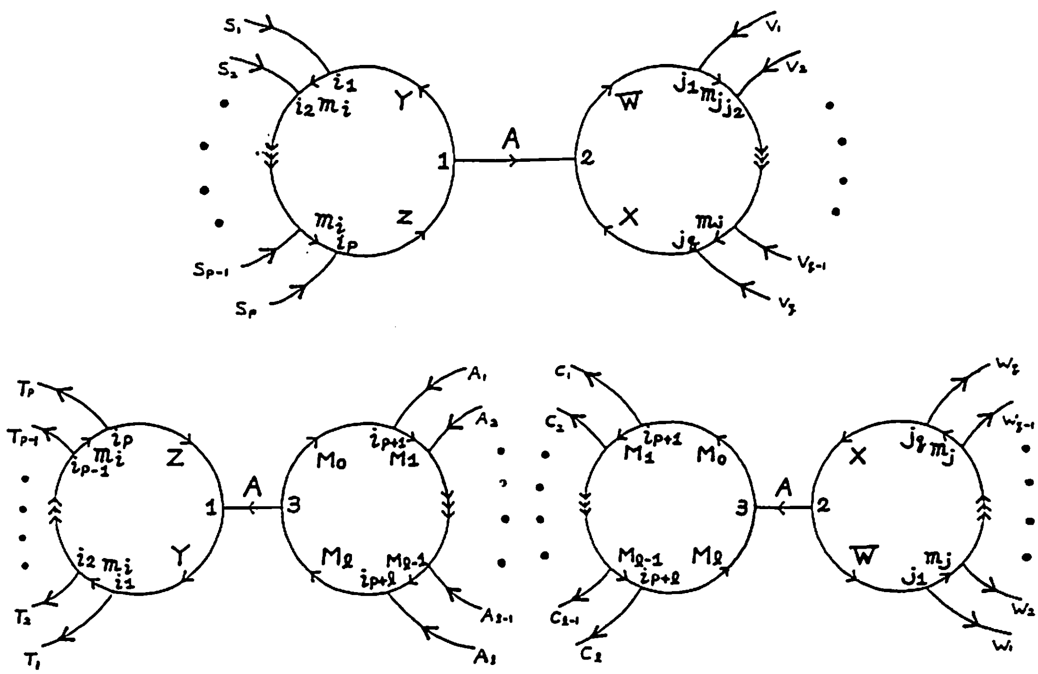
(2)　(1-A)⇔(1-B2) の変換も存在するが，この labels の変換の algorithms も(1)の場合と同様に構成できる．



(1 − B 2)

(3) Heegaard diagrams の変換 (1-A)⇔(1-B3)(次図)に対応する labels の変換

（１－Ｂ３）



(1-B3) の部分を持つ Heegaard diagram の labels 表示を HG1'' とする.

HG1'' =		
W1''	$\cdots(V_q)j_q(X)2(A^{-1})1(Z^{-1})i_p(S_p^{-1})\cdots$ $\cdots(S_1)i_1(Y^{-1})1(A)2(W)j_1(V_1^{-1})\cdots$ $\cdots(S_2)i_2(m_i^{-1})i_1(S_1^{-1})\cdots$ $\vdots$ $\cdots(S_p)i_p(m_i^{-1})i_{p-1}(S_{p-1}^{-1})\cdots$	(1) (l+1) (l+2) (l+p)
W2''	$\cdots(T_p^{-1})i_p(Z)1(A^{-1})3(M_0)i_{p+1}(A_1^{-1})\cdots$ $\cdots(A_1)i_{p+1}(M_l)3(A)1(Y)i_1(T_1)\cdots$	(1) (2)
W3''	$\cdots(C_1^{-1})i_{p+1}(M_0^{-1})3(A^{-1})2(X^{-1})j_q(W_q)\cdots$ $\cdots(C_2^{-1})i_p+_2(M_1^{-1})i_{p+1}(C_1)\cdots$ $\vdots$ $\cdots(C_l^{-1})i_{p+1}(M_{l-1}^{-1})i_{p+l-1}(C_{l-1})\cdots$ $\cdots(W_1^{-1})j_1(W^{-1})2(A)3(M_l^{-1})i_{p+1}(C_l)\cdots$	(1) (2) (l) (l+1)
W4	r_k (W1''～W3'' 以外の words)	
M''	$i_1(m_i)i_2 \cdot \cdots \cdot i_p(Z)1(Y)i_1$ $j_1(m_j)j_2 \cdot \cdots \cdot j_q(X)2(W)j_1$ $k_1(m_k)k_2 \cdot \cdots \cdot k_u(m_k)k_1 \ (k \neq i,j)$ $3(M_0)i_{p+1}(M_1)i_{p+2} \cdot \cdots \cdot i_{p+l-1}(M_{l-1})i_{p+1}(M_l)3$	(1) (2) (3) (4)
L1''	$l_{r1}''= \quad \cdots(A_1)i_{p+1}(C_1)\cdots$ $\vdots$ $l_{rl}''= \quad \cdots(A_l)i_{p+1}(C_l)\cdots$	(1) (l)
L2	$l_{s1}= \quad \cdots(V_1)j_1(W_1)\cdots$ $\vdots$ $l_{sq}= \quad \cdots(V_q)j_q(W_q)\cdots$	(1) (q)
L3	$l_{t1}= \quad \cdots(S_1)i_1(T_1)\cdots$ $\vdots$ $l_{tp}= \quad \cdots(S_p)i_p(T_p)\cdots$	(1) (p)
L4''	$l_u=u_1(l_u)u_2 \cdot \cdots \cdot u_v(l_u)u_1$ (L1'',L2,L3 以外の longitudes) 1(A)2(A)3(A)1	

定理２． HG1⇔HG1'' の labels の変換の algorithms が存在する．

証明 HG1⇒HG1'' の algorithms を与える．

STEP 1 HG1 L4 (+) 1(A)2(A)3(A)1 (L4 に新しい longitude を追加)

STEP 2 W1 (-) (2)〜(l) ((2)〜(l) を消去)

(1) $j_{q+1}(B_1{}^{-1})i_{p+1} \to 2(A^{-1})1$

(l+1) $i_{p+1}(B_1)j_{q+1} \to 1(A)2$

STEP 3 M (1) (-) $i_{p+1}(M_1)i_{p+2}\cdot\cdots\cdot i_{p+l-1}(M_{l-1})i_{p+1}$

この結果 $i_1(m_1)i_2\cdot\cdots\cdot i_p(Z)(Y)i_1$ ができる．次に(Z)と(Y)の間に 1 を挿入すると，HG1'' の M'' の(1)を得る．

(2) (-) $j_{q+1}(N_1)j_{q+2}\cdot\cdots\cdot j_{q+l-1}(N_{l-1})j_{q+1}$

この結果 $j_1(m_j)j_2\cdot\cdots\cdot j_q(X)(W)j_1$ ができる．次の(X)と(W)の間に 2 を挿入すると，HG1'' の M'' の(2)を得る．

(1)で消去した $i_{p+1}(M_1)i_{p+2}\cdot\cdots\cdot i_{p+l-1}(M_{l-1})i_{p+1}$ を新しい文字列とする．この文字列の最後に新しい文字列 $(M_1)3(M_0)i_{p+1}$ を結合すると，HG1'' の M'' の(4)を得る．

STEP 4 L1 (1) (-) $(B_1)j_{q+1}$

⋮

(l) (-) $(B_1)j_{q+1}$

STEP 5 W2 (1) $i_p(Z)i_{p+1}(A_1{}^{-1}) \to i_p(Z)\underline{1(A^{-1})3(M_0)}i_{p+1}(A_1{}^{-1})$ (ｱﾝﾀﾞｰﾗｲﾝの部分を挿入)

(2) $(A_1)i_{p+1}(Y) \to (A_1)i_{p+1}\underline{(M_1)3(A)1}(Y)$

STEP 6 W3 (2) $j_{q+2}(N_1{}^{-1})j_{q+1} \to i_{p+2}(M_1{}^{-1})i_{p+1}$

⋮

(l) $j_{q+l}(N_{l-1}{}^{-1})j_{q+l-1} \to i_{p+l}(M_{l-1}{}^{-1})i_{p+l-1}$

(1)の j_{q+1} を i_{p+1} にかえる．次に i_{p+1} と (X^{-1}) の間に $(M_0{}^{-1})3(A^{-1})2$ を挿入すると，HG1'' の W3'' の(1)を得る．

(l+1)の j_{q+1} を i_{p+1} にかえる．次に (W^{-1}) と i_{p+1} の間に $2(A)3(M_1{}^{-1})$ を挿入すると，HG1'' の W3'' の(l+1)を得る．

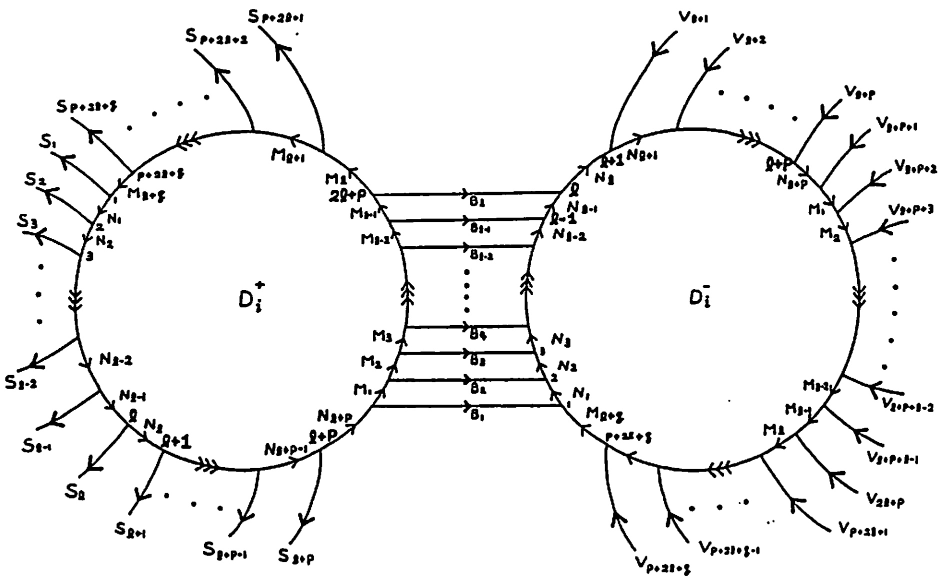
以上の操作で HG1⇒HG1'' が得られた．

逆に HG1''⇒HG1 の algorithms も labels の連鎖反応により構成することができる．□

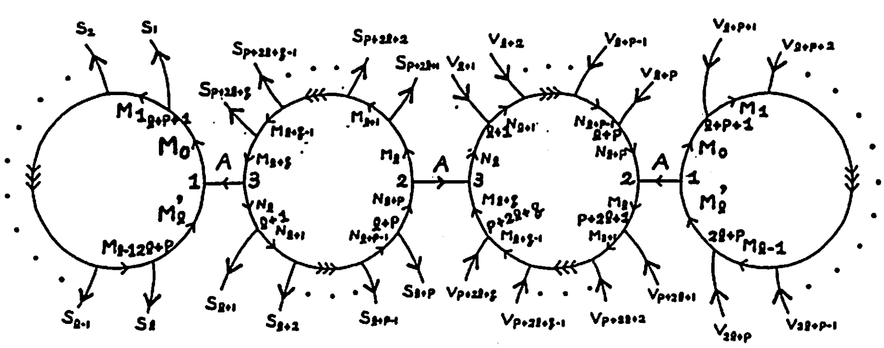
練習問題 HG1''⇒HG1 の algorithms を構成せよ．

2. Heegaard diagrams の変換 (2-A)⇔(2-B)(次図)に対応する labels の変換

(2−A)



(2−B)



(2-A) の部分を持つ Heegaard diagram の labels 表示を HG2 とする. (2-B) の部分を持つ Heegaard diagram の labels 表示を HG2' とする.

HG2=

W1

$\cdots(V_{2l+p+q})2l+p+q(M_{l+q})1(B_1^{-1})l+p+1(N_{l+p}^{-1})l+p(S_{l+p})\cdots$ (1)

$$\left\{\begin{array}{ll} 1(N_1)2(B_2^{-1})l+p+2(M_1^{-1})l+p+1(B_1)1 & (2) \\ \vdots & \\ l-1(N_{l-1})l(B_l^{-1})2l+p(M_{l-1}^{-1})2l+p-1(B_{l-1})l-1 & (l) \end{array}\right\}$$

$\cdots(S_{2l+p+1}^{-1})2l+p+1(M_l^{-1})2l+p(B_l)l(N_l)l+1(V_{l+1}^{-1})\cdots$ (l+1)

W2

$$\left\{\begin{array}{ll} \cdots(S_{2l+p+2}^{-1})2l+p+2(M_{l+1}^{-1})2l+p+1(S_{2l+p+1})\cdots & (1) \\ \vdots & \\ \cdots(S_{2l+p+q}^{-1})2l+p+q(M_{l+q-1}^{-1})2l+p+q-1(S_{2l+p+q-1})\cdots & (q-1) \end{array}\right\}$$

$\cdots(S_1^{-1})1(M_{l+q}^{-1})2l+p+q(S_{2l+p+q})\cdots$ (q)

$$\left\{\begin{array}{ll} \cdots(S_2^{-1})2(N_1^{-1})1(S_1)\cdots & (q+1) \\ \vdots & \\ \cdots(S_l^{-1})l(N_{l-1}^{-1})l-1(S_{l-1})\cdots & (q+l-1) \end{array}\right\}$$

$\cdots(S_{l+1}^{-1})l+1(N_l^{-1})l(S_l)\cdots$ (q+l)

$$\left\{\begin{array}{ll} \cdots(S_{l+2}^{-1})l+2(N_{l+1}^{-1})l+1(S_{l+1})\cdots & (q+l+1) \\ \vdots & \\ \cdots(S_{l+p}^{-1})l+p(N_{l+p-1}^{-1})l+p-1(S_{l+p-1})\cdots & (q+l+p-1) \end{array}\right\}$$

W3

$$\left\{\begin{array}{ll} \cdots(V_{l+1})l+1(N_{l+1})l+2(V_{l+2}^{-1})\cdots & (1) \\ \vdots & \\ \cdots(V_{l+p-1})l+p-1(N_{l+p-1})l+p(V_{l+p}^{-1})\cdots & (p-1) \end{array}\right\}$$

$\cdots(V_{l+p})l+p(N_{l+p})l+p+1(V_{l+p+1}^{-1})\cdots$ (p)

$$\left\{\begin{array}{ll} \cdots(V_{l+p+1})l+p+1(M_1)l+p+2(V_{l+p+2}^{-1})\cdots & (p+1) \\ \vdots & \\ \cdots(V_{2l+p-1})2l+p-1(M_{l-1})2l+p(V_{2l+p}^{-1})\cdots & (p+l-1) \end{array}\right\}$$

$\cdots(V_{2l+p})2l+p(M_l)2l+p+1(V_{2l+p+1}^{-1})\cdots$ (p+l)

$$\left\{\begin{array}{ll} \cdots(V_{2l+p+1})2l+p+1(M_{l+1})2l+p+2(V_{2l+p+2}^{-1})\cdots & (p+l+1) \\ \vdots & \\ \cdots(V_{2l+p+q-1})2l+p+q-1(M_{l+q-1})2l+p+q(V_{2l+p+q}^{-1})\cdots & (p+l+q-1) \end{array}\right\}$$

W4

r_k (W1～W3 以外の words)

M

$1(N_1)2\cdot\cdots\cdot l-1(N_{l-1})l(N_l)l+1(N_{l+1})l+2\cdot\cdots\cdot l+p-1(N_{l+p-1})l+p(N_{l+p})\cdot$
$l+p+1(M_1)l+p+2\cdot\cdots\cdot 2l+p(M_l)2l+p+1(M_{l+1})2l+p+2\cdot\cdots\cdot 2l+p+q(M_{l+q})1$ (1)

$k_1(m_k)k_2\cdot\cdots\cdot k_u(m_k)k_1$ $(k=1,\cdots,n-1)$ (2)

L1

$$\left\{\begin{array}{lll} l_{r1}= & \cdots(V_{l+1})l+1(S_{l+1})\cdots & (l+1) \\ & \vdots & \\ l_{rp}= & \cdots(V_{l+p})l+p(S_{l+p})\cdots & (l+p) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{lll} l_{rp+1}= & \cdots(V_{l+p+1})l+p+1(B_1)1(S_1)\cdots & (1) \\ & \vdots & \\ l_{rp+l}= & \cdots(V_{2l+p})2l+p(B_l)l(S_l)\cdots & (l) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} l_{rp+l+1}= & \cdots(V_{2l+p+1})2l+p+1(S_{2l+p+1})\cdots & (l+p+1) \\ & \vdots & \\ l_{rp+l+q}= & \cdots(V_{2l+p+q})2l+p+q(S_{2l+p+q})\cdots & (l+p+q) \end{array}\right\}$$

L2

$l_u=u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1$ (L1 以外の longitudes)

(72)

$$HG2' = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

W1'

$$\cdots(V_{2l+p+q})2l+p+q(M_{l+q})3(A^{-1})2(N_{l+p}{}^{-1})l+p(S_{l+p})\cdots \qquad (1)$$
$$\cdots(S_{2l+p+1}{}^{-1})2l+p+1(M_{l}{}^{-1})2(A)3(N_{l})l+1(V_{l+1}{}^{-1})\cdots \qquad (l+1)$$

W2'

$$\left\{\begin{array}{ll} \cdots(S_{2l+p+2}{}^{-1})2l+p+2(M_{l+1}{}^{-1})2l+p+1(S_{2l+p+1})\cdots & (1) \\ \vdots & \\ \cdots(S_{2l+p+q}{}^{-1})2l+p+q(M_{l+q-1}{}^{-1})2l+p+q-1(S_{2l+p+q-1})\cdots & (q-1) \end{array}\right\}$$
$$\cdots(S_{1}{}^{-1})l+p+1(M_{0}{}^{-1})1(A^{-1})3(M_{l+q}{}^{-1})2l+p+q(S_{2l+p+q})\cdots \qquad (q)$$
$$\left\{\begin{array}{ll} \cdots(S_{2}{}^{-1})l+p+2(M_{1}{}^{-1})l+p+1(S_{1})\cdots & (q+1) \\ \vdots & \\ \cdots(S_{l}{}^{-1})2l+p(M_{l-1}{}^{-1})2l+p-1(S_{l-1})\cdots & (q+l-1) \end{array}\right\}$$
$$\cdots(S_{l+1}{}^{-1})l+1(N_{l}{}^{-1})3(A)1(M_{l}{}'^{-1})2l+p(S_{l})\cdots \qquad (q+l)$$
$$\left\{\begin{array}{ll} \cdots(S_{l+2}{}^{-1})l+2(N_{l+1}{}^{-1})l+1(S_{l+1})\cdots & (q+l+1) \\ \vdots & \\ \cdots(S_{l+p}{}^{-1})l+p(N_{l+p-1}{}^{-1})l+p-1(S_{l+p-1})\cdots & (q+l+p-1) \end{array}\right\}$$

W3'

$$\left\{\begin{array}{ll} \cdots(V_{l+1})l+1(N_{l+1})l+2(V_{l+2}{}^{-1})\cdots & (1) \\ \vdots & \\ \cdots(V_{l+p-1})l+p-1(N_{l+p-1})l+p(V_{l+p}{}^{-1})\cdots & (p-1) \end{array}\right\}$$
$$\cdots(V_{l+p})l+p(N_{l+p})2(A^{-1})1(M_{0})l+p+1(V_{l+p+1}{}^{-1})\cdots \qquad (p)$$
$$\left\{\begin{array}{ll} \cdots(V_{l+p+1})l+p+1(M_{1})l+p+2(V_{l+p+2}{}^{-1})\cdots & (p+1) \\ \vdots & \\ \cdots(V_{2l+p-1})2l+p-1(M_{l-1})2l+p(V_{2l+p}{}^{-1})\cdots & (p+l-1) \end{array}\right\}$$
$$\cdots(V_{2l+p})2l+p(M_{l}{}')1(A)2(M_{l})2l+p+1(V_{2l+p+1}{}^{-1})\cdots \qquad (p+l)$$
$$\left\{\begin{array}{ll} \cdots(V_{2l+p+1})2l+p+1(M_{l+1})2l+p+2(V_{2l+p+2}{}^{-1})\cdots & (p+l+1) \\ \vdots & \\ \cdots(V_{2l+p+q-1})2l+p+q-1(M_{l+q-1})2l+p+q(V_{2l+p+q}{}^{-1})\cdots & (p+l+q-1) \end{array}\right\}$$

W4

r_k (W1'〜W3' 以外の words)

M'

$$3(N_{l})l+1(N_{l+1})l+2 \cdot \cdots \cdot l+p-1(N_{l+p-1})l+p(N_{l+p}) \cdot$$
$$2(M_{l})2l+p+1(M_{l+1})2l+p+2 \cdot \cdots \cdot 2l+p+q-1(M_{l+q-1})2l+p+q(M_{l+q})3 \qquad (1')$$
$$l+p+1(M_{1})l+p+2 \cdot \cdots \cdot 2l+p-1(M_{l-1})2l+p(M_{l}{}')1(M_{0})l+p+1 \qquad (1'')$$
$$k_1(m_k)k_2 \cdot \cdots \cdot k_u(m_k)k_1 \quad (k=1,\cdots,n-1) \qquad (2)$$

L1'

$$\left\{\begin{array}{lll} l_{r1}= & \cdots(V_{l+1})l+1(S_{l+1})\cdots & (l+1) \\ & \vdots & \\ l_{rp}= & \cdots(V_{l+p})l+p(S_{l+p})\cdots & (l+p) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{lll} l_{rp+1}{}'= & \cdots(V_{l+p+1})l+p+1(S_{1})\cdots & (1) \\ & \vdots & \\ l_{rp+l}{}'= & \cdots(V_{2l+p})2l+p(S_{l})\cdots & (l) \end{array}\right\}$$
$$\left\{\begin{array}{lll} l_{rp+l+1}= & \cdots(V_{2l+p+1})2l+p+1(S_{2l+p+1})\cdots & (l+p+1) \\ & \vdots & \\ l_{rp+l+q}= & \cdots(V_{2l+p+q})2l+p+q(S_{2l+p+q})\cdots & (l+p+q) \end{array}\right\}$$

L2'

$l_u=u_1(l_u)u_2 \cdot \cdots \cdot u_v(l_u)u_1$ (L1' 以外の longitudes)

$1(A)2(A)3(A)1$

定理３． HG2⇔HG2' の labels の変換の algorithms が存在する．

証明 HG2⇒HG2' の algorithms を与える．

STEP 1 L2 (+) $1(A)2(A)3(A)1$ (新しい longitude 追加)

STEP 2 W1 (1) $1(B_1^{-1})l+p+1 \rightarrow 3(A^{-1})2$

(l+1) $2l+p(B_l)l \rightarrow 2(A)3$

(2)〜(l) (-)(文字列消去)

STEP 3 M (1)の文字列を

(a) $(M_l)2l+p+1(M_{l+1})2l+p+2\cdot\cdots\cdot 2l+p+q(M_{l+q})1\cdot$

$(N_1)2\cdot\cdots\cdot l-1(N_{l-1})l(N_l)l+1\cdot\cdots\cdot l+p-1(N_{l+p-1})l+p(N_{l+p})$

(b) $l+p+1(M_1)l+p+2\cdot\cdots\cdot 2l+p-1(M_{l-1})2l+p$

に2分割する．

(a)の $1(N_1)2\cdot\cdots\cdot l-1(N_{l-1})l$ を消去すると

$(M_l)2l+p+1(M_{l+1})2l+p+2\cdot\cdots\cdot 2l+p+q(M_{l+q})1\cdot$

$(N_l)l+1\cdot\cdots\cdot l+p-1(N_{l+p-1})l+p(N_{l+p})$

を得る．ここで (N_{l+p}) の後に 2 をつけると，

$2(M_l)2l+p+1(M_{l+1})2l+p+2\cdot\cdots\cdot 2l+p+q(M_{l+q})\underline{1}\cdot$

$(N_l)l+1\cdot\cdots\cdot l+p-1(N_{l+p-1})l+p(N_{l+p})2$

を得る．さらに 1(ｱﾝﾀﾞｰﾗｲﾝ) を 3 にかえると HG2' の M' の(1')を得る．

(b) の $2l+p$ の後に $(M_l')1(M_0)l+p+1$ をつけ加えると HG2'の M の(1'')を得る．

STEP 4 L1 (i) (-) $(B_i)i$ $(i=1,\cdots,l)$

STEP 5 W3 (p) (N_{l+p}) と $l+p+1$ の間に $2(A^{-1})1(M_0)$ を挿入する．

(p+l) $2l+p$ と(M_l) の間に $(M_l')1(A)2$ を挿入する．

STEP 6 W2
$$\left\{\begin{aligned} &(q+1) \quad 2(N_1^{-1})1 \rightarrow l+p+2(M_1^{-1})l+p+1 \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &(q+l-1) \quad l(N_l^{-1})l-1 \rightarrow 2l+p(M_{l-1}^{-1})2l+p-1 \end{aligned}\right.$$

(q) $1 \rightarrow l+p+1(M_0^{-1})1(A^{-1})3$

(q+l) $l \rightarrow 3(A)1(M_l'^{-1})2l+p$

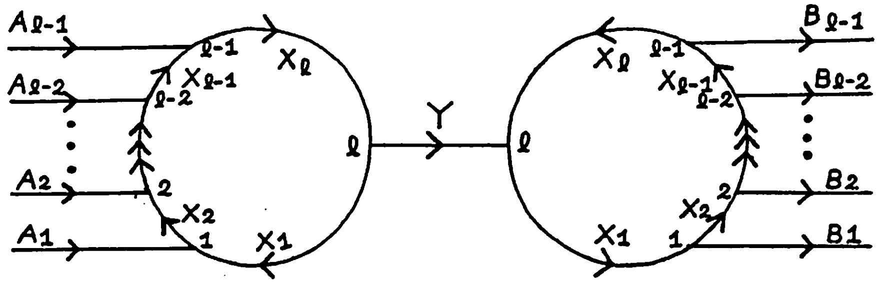
以上の操作で HG1⇒HG1'' が得られた．

逆変換 HG2'⇒HG2 も labels の連鎖反応により構成される． □

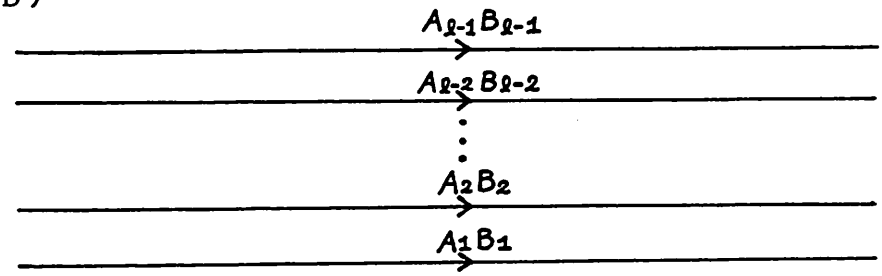
練習問題 HG2'⇒HG2 の algorithms を構成せよ．

3. Heegaard diagrams の変換 (3-A)⇔(3-B)(次図)に対応する labels の変換

(3－A)



(3－B)



(3-A) の部分を持つ Heegaard diagram の labels 表示を HG3 とする. (3-B) の部分を持つ Heegaard diagram の labels 表示を HG3' とする.

HG3 =

W1

$$\cdots(B_1^{-1})1(X_1^{-1})l(Y^{-1})l(X_1)1(A_1^{-1})\cdots \quad (1)$$

$$\cdots(A_{l-1})l-1(X_l)l(Y)l(X_l^{-1})l-1(B_{l-1})\cdots \quad (2)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cdots(A_1)1(X_2)2(A_2^{-1})\cdots \quad (3) \\ \vdots \\ \cdots(A_{l-2})l-2(X_{l-1})l-1(A_{l-1}^{-1})\cdots \quad (l) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cdots(B_2^{-1})2(X_2^{-1})1(B_1)\cdots \quad (l+1) \\ \vdots \\ \cdots(B_{l-1}^{-1})l-1(X_{l-1}^{-1})l-2(B_{l-2})\cdots \quad (2l-2) \end{array}\right.$$

W2

r_k (W1 以外の words)

M

$$l(X_1)1(X_2)2\cdot\cdots\cdot l-2(X_{l-1})l-1(X_l)l \quad (1)$$

$$k_1(m_k)k_2\cdot\cdots\cdot k_u(m_k)k_1 \quad (k=1,\cdots,n-1) \quad (2)$$

L

$$\left\{\begin{array}{ll} l_{r1}= & \cdots(A_1)1(B_1)\cdots \quad (1) \\ & \vdots \\ l_{rl-1}= & \cdots(A_{l-1})l-1(B_{l-1})\cdots \quad (l-1) \end{array}\right.$$

$$l(Y)l \quad (l)$$

$$l_u=u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1 \quad (u=l+1,\cdots,n)$$

HG3'=

W1'

$$\cdots(B_1^{-1}A_1^{-1})\cdots \quad (1)$$

$$\cdots(A_{l-1}B_{l-1})\cdots \quad (2)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cdots(A_1B_1)\cdot\cdots\cdot(B_2^{-1}A_2^{-1})\cdots \quad (3) \\ \vdots \\ \cdots(A_{l-2}B_{l-2})\cdot\cdots\cdot(B_{l-1}^{-1}A_{l-1}^{-1})\cdots \quad (l) \end{array}\right.$$

W2

r_k (W1' 以外の words)

M'

$$k_1(m_k)k_2\cdot\cdots\cdot k_u(m_k)k_1 \quad (k=1,\cdots,n-1) \quad (2)$$

L'

$$\left\{\begin{array}{ll} l_{r1}'= & \cdots(A_1B_1)\cdots \quad (1) \\ & \vdots \\ l_{rl-1}'= & \cdots(A_{l-1}B_{l-1})\cdots \quad (l-1) \end{array}\right.$$

$$l_u=u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1 \quad (u=l+1,\cdots,n)$$

定理４． HG3⇔HG3' の labels の変換の algorithms が存在する．

証明 HG3⇒HG3' の algorithms を与える．

STEP 1 M (-) (1) (M の(1)を消去)

L (-) (l) (L の(l)を消去)

L (i) $\cdots(A_l)i(B_l)\cdots \rightarrow \cdots(A_lB_l)\cdots$ $(i=1,\cdots,l-1)$

STEP 2 W1 (1) $\cdots(B_1^{-1})1(X_1^{-1})1(Y^{-1})1(X_1)1(A_1^{-1})\cdots \rightarrow \cdots(B_1^{-1}A_1^{-1})\cdots$

(2) $\cdots(A_{l-1})l-1(X_l)l(Y)l(X_l^{-1})l-1(B_{l-1})\cdots \rightarrow \cdots(A_{l-1}B_{l-1})\cdots$

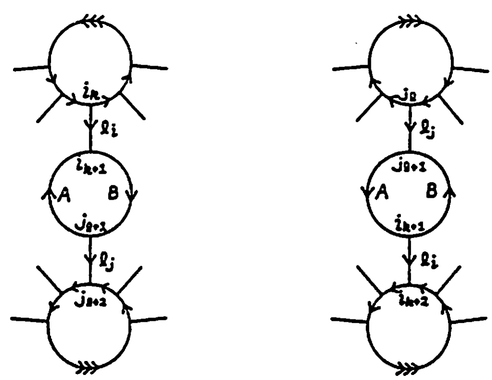
$$\left\{\begin{array}{lll} (3)+(l-1) & \cdots(A_1B_1)\cdots(B_2^{-1}A_2^{-1})\cdots & (3) \\ & \vdots & \\ (l)+(2l-2) & \cdots(A_{l-2}B_{l-2})\cdots(B_{l-1}^{-1}A_{l-1}^{-1})\cdots & (l) \end{array}\right\}$$

以上の操作で HG3⇒HG3' が得られた．

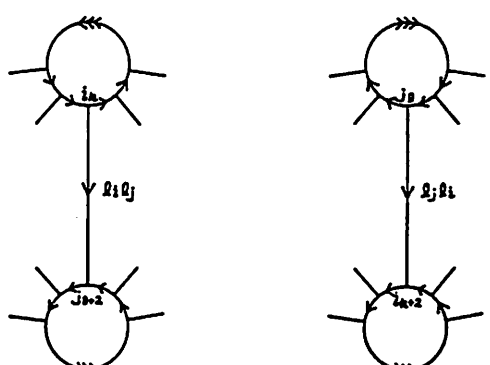
逆変換 HG3'⇒HG3 も labels の連鎖反応により構成される． □

４． Heegaard diagrams の変換 (4-A)⇔(4-B)(次図)に対応する labels の変換

(４－Ａ)



(４－Ｂ)



(4-A) の部分を持つ Heegaard diagram の labels 表示を HG4 とする．(4-B) の部分を持つ Heegaard diagram の labels 表示を HG4’ とする．

HG4 =

W 1	$\cdots j_{l+2}(l_j^{-1})j_{l+1}(A)i_{k+1}(l_i^{-1})i_k\cdots$	(1)
	$\cdots i_k(l_i)i_{k+1}(B)j_{l+1}(l_j)j_{l+2}\cdots$	(2)
	$\cdots i_{k+2}(l_i^{-1})i_{k+1}(A^{-1})j_{l+1}(l_j^{-1})j_l\cdots$	(3)
	$\cdots j_l(l_j)j_{l+1}(B^{-1})i_{k+1}(l_i)i_{k+2}\cdots$	(4)
W 2	r_k (W1 以外の words)	
M	$j_{l+1}(A)i_{k+1}(B)j_{l+1}$	
	$k_1(m_k)k_2\cdot\cdots\cdot k_u(m_k)k_1$ $(k=1,\cdots,n-1)$	
L	$l_i=$ $\cdots i_k(l_i)i_{k+1}(l_i)i_{k+2}\cdots$	(1)
	$l_j=$ $\cdots j_l(l_j)j_{l+1}(l_j)j_{l+2}\cdots$	(2)
	$l_u=u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1$ $(u\neq i,j)$	

HG4’=

W 1’	$\cdots j_{l+2}(l_j^{-1}l_i^{-1})i_k\cdots$	(1)
	$\cdots i_k(l_il_j)j_{l+2}\cdots$	(2)
	$\cdots i_{k+2}(l_i^{-1}l_j^{-1})j_l\cdots$	(3)
	$\cdots j_l(l_jl_i)i_{k+2}\cdots$	(4)
W 2	r_k (W1’ 以外の words)	
M’	$k_1(m_k)k_2\cdot\cdots\cdot k_u(m_k)k_1$ $(k=1,\cdots,n-1)$	
L’	$l_i{}'=$ $\cdots\cdot i_k(l_il_j)j_{l+2}\cdot\cdots\cdot j_l(l_jl_i)i_{k+2}\cdot\cdots$	(1’)
	$l_u=u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1$ $(u\neq i)$	

定理５． HG4⇔HG4’ の labels の変換の algorithms が存在する．

証明略． □

§3. HG(m, l) からの基本群の表示

$(H_1;\partial D_1',\cdots,\partial D_n')=(H_1;l_1,\cdots,l_n)$ を $(H_1,H_2;F)$ の genus $n(\geqq 1)$ Heegaard diagram とする．その HG(m,l) は定義7の表示とし，連結とする．このとき Heegaard diagram は連結であるから，HG(m,l) の $\{j_1(l_j)j_2,\cdots,j_1(l_j)j_1\}$ $(j=1,\cdots,n)$の中から n-1 個の edges を選んで，H_1 の n 個の meridian disks $\{D_1,\cdots,D_n\}$ が連結になるように結ぶことができる（選びかたは一通りではない）．これらの edges を $L_1,\cdots,L_{n-1}$ とする．

我々は edge を表す label $j_i(l_j)j_{i+1}$ を基本群の生成元の記号として併用する．

定理6． 連結可付向閉3-多様体 M^3 の genus $n(\geqq 1)$の Heegaard diagram を $(H_1;l_1,\cdots,l_n)$ とする．その HG(m,l) は H_1 の meridian disks $\{D_1,\cdots,D_n\}$ に関して連結とする．このとき M^3 の基本群$\pi_1(M^3)$ は，$\{j_1(l_j)j_2,\cdots,j_1(l_j)j_1\}$ $(j=1,\cdots,n)$を生成元とする．関係式は，$L_1=1,\cdots,L_{n-1}=1$ および HG(m,l) の 各 2-disk の境界の edges $j_i(l_j)j_{i+1}$ を，$i_j(m_i)i_{j+1}$ を省略して正の向き(または負の向き)に続けて読んだ語(word)（どこから読み始めてもよい．$j_i(l_j)j_{i+1}$ の向きと反対に読むときは $(j_i(l_j)j_{i+1})^{-1}$ or $j_{i+1}(l_j^{-1})j_i$ と読む）と $j_1(l_j)j_2\cdot\cdots\cdot j_1(l_j)j_1=1$ $(j=1,\cdots,n)$ となる[6]．

定理6 の基本群の表示を

$$\pi_1(M^3)=\langle j_i(l_j)j_{i+1} \mid L_1=1,\cdots,L_{n-1}=1,\gamma_1=1,\cdots,\gamma_{\alpha 2}=1,j_1(l_j)j_2\cdot\cdots\cdot j_1(l_j)j_1=1\rangle \quad (j=1,\cdots,n)$$

と表す．ここで関係子 γ_j は HG(m,l) の 2-disk 上の edges $j_i(l_j)j_{i+1}$ だけを続けて読んだ語である．

定義9． 定理6 の基本群の表示を HG(m,l) から得られる基本群の表示と呼ぶ．

G(m,l) が非連結のとき，その HG(m,l) から基本群の表示を求める方法がある[6]．しかし，非連結な G(m,l) を初等DS-変形を使って連結な G(m,l) に変形できるので，本稿では G(m,l),HG(m,l) が連結なときのみを扱っている．

§４． 基本群の変換

$HG(m,l)$ は定義7の表示とする．$HG(m,l)$ の文字列から$\{i_j(m_i)i_{j+1}\}(i=1,\cdots,n)$を取り除くと，各 r_k は文字 $i_j(l_i)i_{j+1}(\text{or } i_{j+1}(l_i^{-1})i_j)$ だけの集まりとなるが，これを γ_k で表す．そして H_1 の各 meridian disk D_i を結ぶ edges を選んで $\{L_i\}(i=1,\cdots,n-1)$とすると，生成元が $\{i_j(l_i)i_{j+1}\}$ であり，γ_k, L_i を関係子とする基本群の表示が得られる．従って $HG(m,l)$ の変換から基本群 $\pi_1(M^3)$ の変換が得られる．すなわち

定理７．（主定理）

$$\text{Heegaard diagrams の変換}\begin{cases} HG1 \Leftrightarrow HG1' \\ HG1 \Leftrightarrow HG1'' \\ HG2 \Leftrightarrow HG2' \\ HG3 \Leftrightarrow HG3' \\ HG4 \Leftrightarrow HG4' \end{cases} \text{に対応する基本群の変換}\begin{cases} \pi 1 \Leftrightarrow \pi 1' \\ \pi 1 \Leftrightarrow \pi 1'' \\ \pi 2 \Leftrightarrow \pi 2' \\ \pi 3 \Leftrightarrow \pi 3' \\ \pi 4 \Leftrightarrow \pi 4' \end{cases}$$

(p.26～32.)

が存在する．

§５． 応用

Heegaard diagram $(H_1;m,l)$ の meridian, longitude 系から基本群の表示が得られる．S^3 の genus 2 の Heegaard diagram では標準形以外は wave を持つ(HOT の定理)．このことにより，S^3 の genus 2 の $(H_1;m,l)$ から表示される基本群は，関係式において相互代入可能である．$G(m,l)$から得られる基本群の表示に対しても，wave が存在するところで相互代入可能である．そして相互代入して得られた基本群の表示は，waveが存在するところで D_n-変形を行って得られる $G(m,l)$ から得られる基本群の表示になるのである．すなわち定理6の基本群の表示に対しても相互代入可能なのである．

§2 で与えた $HG(m,l)$ の変換の algorithms を実際の例に適用することは，非常にやっかいである．しかし，$HG(m,l)$ の初等DS-変形に対応する 0-,1-cells の labels の変換の§2 の algorithms よりは簡単な algorithms が存在する[7]．この algorithms をまとめた内容は別の機会に譲ることとする．

(80)

$\pi 1 =$

$i_j(l_1)i_{j+1}$, $i_{p+k}(B_k)j_{q+k}$

γ1		$\cdots(V_q)j_qj_{q+1}(B_1^{-1})i_{p+1}i_p(S_p^{-1})\cdots$	(1)
		$j_{q+2}(B_2^{-1})i_{p+2}i_{p+1}(B_1)j_{q+1}$	(2)
		$\vdots$	
		$j_{q+l}(B_l^{-1})i_{p+l}i_{p+l-1}(B_{l-1})j_{q+l-1}$	(l)
		$\cdots(S_1)i_1i_{p+l}(B_l)j_{q+l}j_1(V_1^{-1})\cdots$	(l+1)
		$\cdots(S_2)i_2i_1(S_1^{-1})\cdots$	(l+2)
		$\vdots$	
		$\cdots(S_p)i_pi_{p-1}(S_{p-1}^{-1})\cdots$	(l+p)
γ2		$\cdots(T_p^{-1})i_pi_{p+1}(A_1^{-1})\cdots$	(1)
		$\cdots(A_l)i_{p+l}i_1(T_1)\cdots$	(2)
γ3		$\cdots(C_1^{-1})j_{q+1}j_q(W_q)\cdots$	(1)
		$\cdots(C_2^{-1})j_{q+2}j_{q+1}(C_1)\cdots$	(2)
		$\vdots$	
		$\cdots(C_l^{-1})j_{q+l}j_{q+l-1}(C_{l-1})\cdots$	(l)
		$\cdots(W_1^{-1})j_1j_{q+l}(C_l)\cdots$	(l+1)
γ4		γ_k (γ1〜γ3 以外の関係子(式))	
L1	$l_{\gamma 1}=$	$\cdots(A_1)i_{p+1}(B_1)j_{q+1}(C_1)\cdots$	(1)
		$\vdots$	
	$l_{\gamma l}=$	$\cdots(A_l)i_{p+l}(B_l)j_{q+l}(C_l)\cdots$	(l)
L2	$l_{s1}=$	$\cdots(V_1)j_1(W_1)\cdots$	(1)
		$\vdots$	
	$l_{sq}=$	$\cdots(V_q)j_q(W_q)\cdots$	(q)
L3	$l_{t1}=$	$\cdots(S_1)i_1(T_1)\cdots$	(1)
		$\vdots$	
	$l_{tp}=$	$\cdots(S_p)i_p(T_p)\cdots$	(p)
L4	$l_u=u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1$ (L1〜L3,L5 以外の関係子(式))		
L5	$L_1,\cdots,L_i=S_i,L_j=B_j,\cdots,L_{n-1}$		

$\pi 1' =$

$$i_J(l_1)i_{J+1}\ ,\ j_{q+p+1-k}'(E_k)i_k$$

$\gamma 1'$	$\cdots(V_q)j_q j_{q+1}'(S_p^{-1})\cdots$	(1)
	$\cdots(S_1)j_{q+p}'j_1(V_1^{-1})\cdots$	(l+1)
	$\cdots(S_2)j_{q+p-1}'j_{q+p}'(S_1^{-1})\cdots$	(l+2)
	⋮	
	$\cdots(S_p)j_{q+1}'j_{q+2}'(S_{p-1}^{-1})\cdots$	(l+p)
$\gamma 2$	$\cdots(T_p^{-1})i_p i_{p+1}(A_1^{-1})\cdots$	(1)
	$\cdots(A_1)i_{p+1}i_1(T_1)\cdots$	(2)
$\gamma 3'$	$\cdots(C_1^{-1})i_{p+1}i_p(E_p^{-1})j_{q+1}'j_q(W_q)\cdots$	(1)
	$\cdots(C_2^{-1})i_{p+2}i_{p+1}(C_1)\cdots$	(2)
	⋮	
	$\cdots(C_l^{-1})i_{p+l}i_{p+l-1}(C_{l-1})\cdots$	(l)
	$j_{q+1}'(E_p)i_p i_{p-1}(E_{p-1}^{-1})j_{q+2}'$	(l+2)
	⋮	
	$j_{q+p-1}'(E_2)i_2 i_1(E_1^{-1})j_{q+p}'$	(l+p-1)
	$\cdots(W_1^{-1})j_1 j_{q+p}'(E_1)i_1 i_{p+1}(C_1)\cdots$	(l+1)
$\gamma 4$	γ_K （$\gamma 1', \gamma 2, \gamma 3'$ 以外の関係子(式)）	

L 1'	$l_{r1}'=$	$\cdots(A_1)i_{p+1}(C_1)\cdots$	(1)
		⋮	
	$l_{rl}'=$	$\cdots(A_l)i_{p+l}(C_l)\cdots$	(l)
L 2	$l_{s1}=$	$\cdots(V_1)j_1(W_1)\cdots$	(1)
		⋮	
	$l_{sq}=$	$\cdots(V_q)j_q(W_q)\cdots$	(q)
L 3'	$l_{t1}'=$	$\cdots(S_1)j_{q+p}'(E_1)i_1(T_1)\cdots$	(1)
		⋮	
	$l_{tp}'=$	$\cdots(S_p)j_{q+1}'(E_p)i_p(T_p)\cdots$	(p)
L 4	$l_u=u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1$ (L1', L2, L3', L5 以外の関係子(式))		
L 5	$L_1,\cdots,L_I=S_I,L_J=E_J,\cdots,L_{n-1}$		

$\pi 1'' =$

$i_J(l_1)i_{J+1},1(A)2,2(A)3,3(A)1$

$\gamma 1''$		$\cdots(V_q)j_q2(A^{-1})1i_p(S_p^{-1})\cdots$	(1)
		$\cdots(S_1)i_11(A)2j_1(V_1^{-1})\cdots$	(l+1)
		$\cdots(S_2)i_2i_1(S_1^{-1})\cdots$	(l+2)
		$\vdots$	
		$\cdots(S_p)i_pi_{p-1}(S_{p-1}^{-1})\cdots$	(l+p)
$\gamma 2''$		$\cdots(T_p^{-1})i_p1(A^{-1})3i_{p+1}(A_1^{-1})\cdots$	(1)
		$\cdots(A_1)i_{p+1}3(A)1i_1(T_1)\cdots$	(l+1)
$\gamma 3''$		$\cdots(C_1^{-1})i_{p+1}3(A^{-1})2j_q(W_q)\cdots$	(1)
		$\cdots(C_2^{-1})i_{p+2}i_{p+1}(C_1)\cdots$	(2)
		$\vdots$	
		$\cdots(C_l^{-1})i_{p+l}i_{p+l-1}(C_{l-1})\cdots$	(l)
		$\cdots(W_1^{-1})j_12(A)3i_{p+1}(C_1)\cdots$	(l+1)
$\gamma 4$		γ_k （$\gamma 1''$～$\gamma 3''$ 以外の関係子(式)）	
L 1''	$l_{r1}''=$	$\cdots(A_1)i_{p+1}(C_1)\cdots$	(1)
		$\vdots$	
	$l_{r1}''=$	$\cdots(A_1)i_{p+1}(C_1)\cdots$	(l)
L 2	$l_{s1}=$	$\cdots(V_1)j_1(W_1)\cdots$	(1)
		$\vdots$	
	$l_{sq}=$	$\cdots(V_q)j_q(W_q)\cdots$	(q)
L 3	$l_{t1}=$	$\cdots(S_1)i_1(T_1)\cdots$	(1)
		$\vdots$	
	$l_{tp}=$	$\cdots(S_p)i_p(T_p)\cdots$	(p)
L 4''	$l_u=u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1$ (L1'',L2,L3,L5 以外の関係子(式)) 1(A)2(A)3(A)1		
L 5	$L_1,\cdots,L_l=S_l$, $L_J=1(A)2,\cdots,L_{n-1}$, 2(A)3		

$\pi 2=$

$i_j(l_1)i_{j+1}$

$\gamma 1$	$\cdots(V_{2l+p+q})2l+p+q1(B_1{}^{-1})l+p+1l+p(S_{l+p})\cdots$	(1)
	$2(B_2{}^{-1})l+p+2l+p+1(B_1)1$	(2)
	$\vdots$	
	$l(B_l{}^{-1})2l+p2l+p-1(B_{l-1})l-1$	(l)
	$\cdots(S_{2l+p+1}{}^{-1})2l+p+12l+p(B_l)ll+1(V_{l+1}{}^{-1})\cdots$	(l+1)
$\gamma 2$	$\cdots(S_{2l+p+2}{}^{-1})2l+p+22l+p+1(S_{2l+p+1})\cdots$	(1)
	$\vdots$	
	$\cdots(S_{2l+p+q}{}^{-1})2l+p+q2l+p+q-1(S_{2l+p+q-1})\cdots$	(q-1)
	$\cdots(S_1{}^{-1})12l+p+q(S_{2l+p+q})\cdots$	(q)
	$\cdots(S_2{}^{-1})21(S_1)\cdots$	(q+1)
	$\vdots$	
	$\cdots(S_l{}^{-1})ll-1(S_{l-1})\cdots$	(q+l-1)
	$\cdots(S_{l+1}{}^{-1})l+1l(S_l)\cdots$	(q+l)
	$\cdots(S_{l+2}{}^{-1})l+2l+1(S_{l+1})\cdots$	(q+l+1)
	$\vdots$	
	$\cdots(S_{l+p}{}^{-1})l+pl+p-1(S_{l+p-1})\cdots$	(q+l+p-1)
$\gamma 3$	$\cdots(V_{l+1})l+1l+2(V_{l+2}{}^{-1})\cdots$	(1)
	$\vdots$	
	$\cdots(V_{l+p-1})l+p-1l+p(V_{l+p}{}^{-1})\cdots$	(p-1)
	$\cdots(V_{l+p})l+pl+p+1(V_{l+p+1}{}^{-1})\cdots$	(p)
	$\cdots(V_{l+p+1})l+p+1l+p+2(V_{l+p+2}{}^{-1})\cdots$	(p+1)
	$\vdots$	
	$\cdots(V_{2l+p-1})2l+p-12l+p(V_{2l+p}{}^{-1})\cdots$	(p+l-1)
	$\cdots(V_{2l+p})2l+p2l+p+1(V_{2l+p+1}{}^{-1})\cdots$	(p+l)
	$\cdots(V_{2l+p+1})2l+p+12l+p+2(V_{2l+p+2}{}^{-1})\cdots$	(p+l+1)
	$\vdots$	
	$\cdots(V_{2l+p+q-1})2l+p+q-12l+p+q(V_{2l+p+q}{}^{-1})\cdots$	(p+l+q-1)
$\gamma 4$	γ_k ($\gamma 1$〜$\gamma 3$ 以外の関係子(式))	
L 1	$l_{r_1}=\ \cdots(V_{l+1})l+1(S_{l+1})\cdots$	(l+1)
	$\vdots$	
	$l_{r_p}=\ \cdots(V_{l+p})l+p(S_{l+p})\cdots$	(l+p)
	$l_{r_{p+1}}=\ \cdots(V_{l+p+1})l+p+1(B_1)1(S_1)\cdots$	(1)
	$\vdots$	
	$l_{r_{p+l}}=\ \cdots(V_{2l+p})2l+p(B_l)l(S_l)\cdots$	(l)
	$l_{r_{p+l+1}}=\ \cdots(V_{2l+p+1})2l+p+1(S_{2l+p+1})\cdots$	(l+p+1)
	$\vdots$	
	$l_{r_{p+l+q}}=\ \cdots(V_{2l+p+q})2l+p+q(S_{2l+p+q})\cdots$	(l+p+q)
L 2	$l_u=u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1$ (L1,L3 以外の関係子(式))	
L 3	$L_1,\cdots,L_{n-1}$	

(84)

$\pi 2' =$

$i_J(l_1)i_{J+1}, 1(A)2, 2(A)3, 3(A)1$

$\gamma 1'$	$\cdots(V_{2l+p+q})2l+p+q3(A^{-1})2l+p(S_{l+p})\cdots$	(1)
	$\cdots(S_{2l+p+1}{}^{-1})2l+p+12(A)3l+1(V_{l+1}{}^{-1})\cdots$	(l+1)
$\gamma 2'$	$\left\{\begin{array}{l}\cdots(S_{2l+p+2}{}^{-1})2l+p+22l+p+1(S_{2l+p+1})\cdots \\ \vdots \\ \cdots(S_{2l+p+q}{}^{-1})2l+p+q2l+p+q-1(S_{2l+p+q-1})\cdots\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{r}(1) \\ \\ (q-1)\end{array}\right\}$
	$\cdots(S_1{}^{-1})l+p+11(A^{-1})32l+p+q(S_{2l+p+q})\cdots$	(q)
	$\left\{\begin{array}{l}\cdots(S_2{}^{-1})l+p+2l+p+1(S_1)\cdots \\ \vdots \\ \cdots(S_l{}^{-1})2l+p2l+p-1(S_{l-1})\cdots\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{r}(q+1) \\ \\ (q+l-1)\end{array}\right\}$
	$\cdots(S_{l+1}{}^{-1})l+13(A)12l+p(S_l)\cdots$	(q+l)
	$\left\{\begin{array}{l}\cdots(S_{l+2}{}^{-1})l+2l+1(S_{l+1})\cdots \\ \vdots \\ \cdots(S_{l+p}{}^{-1})l+pl+p-1(S_{l+p-1})\cdots\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{r}(q+l+1) \\ \\ (q+l+p-1)\end{array}\right\}$
$\gamma 3'$	$\left\{\begin{array}{l}\cdots(V_{l+1})l+1l+2(V_{l+2}{}^{-1})\cdots \\ \vdots \\ \cdots(V_{l+p-1})l+p-1l+p(V_{l+p}{}^{-1})\cdots\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{r}(1) \\ \\ (p-1)\end{array}\right\}$
	$\cdots(V_{l+p})l+p2(A^{-1})1l+p+1(V_{l+p+1}{}^{-1})\cdots$	(p)
	$\left\{\begin{array}{l}\cdots(V_{l+p+1})l+p+1l+p+2(V_{l+p+2}{}^{-1})\cdots \\ \vdots \\ \cdots(V_{2l+p-1})2l+p-12l+p(V_{2l+p}{}^{-1})\cdots\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{r}(p+1) \\ \\ (p+l-1)\end{array}\right\}$
	$\cdots(V_{2l+p})2l+p1(A)22l+p+1(V_{2l+p+1}{}^{-1})\cdots$	(p+l)
	$\left\{\begin{array}{l}\cdots(V_{2l+p+1})2l+p+12l+p+2(V_{2l+p+2}{}^{-1})\cdots \\ \vdots \\ \cdots(V_{2l+p+q-1})2l+p+q-12l+p+q(V_{2l+p+q}{}^{-1})\cdots\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{r}(p+l+1) \\ \\ (p+l+q-1)\end{array}\right\}$
$\gamma 4$	γ_k ($\gamma 1'$～$\gamma 3'$ 以外の関係子(式))	

L 1'	$\left\{\begin{array}{l}l_{\gamma 1} = \cdots(V_{l+1})l+1(S_{l+1})\cdots \quad (l+1) \\ \vdots \\ l_{\gamma p} = \cdots(V_{l+p})l+p(S_{l+p})\cdots \quad (l+p)\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l}l_{\gamma p+1}{}' = \cdots(V_{l+p+1})l+p+1(S_1)\cdots \quad (1) \\ \vdots \\ l_{\gamma p+l}{}' = \cdots(V_{2l+p})2l+p(S_1)\cdots \quad (1)\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l}l_{\gamma p+l+1} = \cdots(V_{2l+p+1})2l+p+1(S_{2l+p+1})\cdots \quad (l+p+1) \\ \vdots \\ l_{\gamma p+l+q} = \cdots(V_{2l+p+q})2l+p+q(S_{2l+p+q})\cdots \quad (l+p+q)\end{array}\right\}$
L 2'	$l_u = u_1(l_u)u_2 \cdot \cdots \cdot u_v(l_u)u_1$ (L1', L3' 以外の関係子(式)) 1(A)2(A)3(A)1
L 3'	$L_1, \cdots, L_{n-1}$, 1(A)2

$\pi 3 =$

$i_J(l_1)i_{J+1}$, $l(Y)l$

$\gamma 1$	$\cdots(B_1{}^{-1})11(Y^{-1})11(A_1{}^{-1})\cdots$	(1)
	$\cdots(A_{l-1})l-1l(Y)ll-1(B_{l-1})\cdots$	(2)
	$\cdots(A_1)12(A_2{}^{-1})\cdots$	(3)
	$\vdots$	
	$\cdots(A_{l-2})l-2l-1(A_{l-1}{}^{-1})\cdots$	(l)
	$\cdots(B_2{}^{-1})21(B_1)\cdots$	(l+1)
	$\vdots$	
	$\cdots(B_{l-1}{}^{-1})l-1l-2(B_{l-2})\cdots$	(2l-2)
$\gamma 2$	γ_K（$\gamma 1$ 以外の関係子(式)）	
L	$l_{\gamma 1}=$ $\cdots(A_1)1(B_1)\cdots$	(1)
	$\vdots$	
	$l_{\gamma l-1}=$ $\cdots(A_{l-1})l-1(B_{l-1})\cdots$	(l-1)
	$l(Y)l$	(l)
	$l_u=u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1$	((1)〜(l) 以外の関係子)
L 2	$L_1,\cdots,L_{n-2}$, A_l	

$\pi 3' =$

$i_J(l_1)i_{J+1}$, $k_J(A_K B_K)k_{J+1}$

$\gamma 1'$	$\cdots(B_1{}^{-1}A_1{}^{-1})\cdots$	(1)
	$\cdots(A_{l-1}B_{l-1})\cdots$	(2)
	$\cdots(A_1B_1)\cdots(B_2{}^{-1}A_2{}^{-1})\cdots$	(3)
	$\vdots$	
	$\cdots(A_{l-2}B_{l-2})\cdots(B_{l-1}{}^{-1}A_{l-1}{}^{-1})\cdots$	(l)
$\gamma 2$	γ_K（$\gamma 1'$ 以外の関係子(式)）	
L'	$l_{\gamma 1}'=$ $\cdots(A_1B_1)\cdots$	(1)
	$\vdots$	
	$l_{\gamma l-1}'=$ $\cdots(A_{l-1}B_{l-1})\cdots$	(l-1)
	$l_u=u_1(l_u)u_2\cdot\cdots\cdot u_v(l_u)u_1$	((1)〜(l-1) 以外の関係子)
L 2	$L_1,\cdots,L_{n-2}$	

$\pi 4 = \left\{ \right.$

$i_j(l_i)i_{j+1}$

$\gamma 1$	$\cdots j_{l+2}(l_j^{-1})j_{l+1}i_{k+1}(l_i^{-1})i_k\cdots$	(1)
	$\cdots i_k(l_i)i_{k+1})j_{l+1}(l_j)j_{l+2}\cdots$	(2)
	$\cdots i_{k+2}(l_i^{-1})i_{k+1}j_{l+1}(l_j^{-1})j_l\cdots$	(3)
	$\cdots j_l(l_j)j_{l+1}i_{k+1}(l_i)i_{k+2}\cdots$	(4)
$\gamma 2$	γ_k（$\gamma 1$ 以外の関係子(式)）	

L	$l_i = \quad \cdots i_k(l_i)i_{k+1}(l_i)i_{k+2}\cdots$	(1)
	$l_j = \quad \cdots j_l(l_j)j_{l+1}(l_j)j_{l+2}\cdots$	(2)
	$l_u = u_1(l_u)u_2 \cdot \cdots \cdot u_v(l_u)u_1 \quad (u \neq i, j)$	
L 2	$L_1, \cdots, L_{n-2}$, $i_k(l_i)i_{k+1}$	

$\pi 4' = \left\{ \right.$

$i_j(l_i)i_{j+1}$

$\gamma 1'$	$\cdots j_{l+2}(l_j^{-1}l_i^{-1})i_k\cdots$	(1)
	$\cdots i_k(l_i l_j)j_{l+2}\cdots$	(2)
	$\cdots i_{k+2}(l_i^{-1}l_j^{-1})j_l\cdots$	(3)
	$\cdots j_l(l_j l_i)i_{k+2}\cdots$	(4)
$\gamma 2$	γ_k（$\gamma 1'$ 以外の関係子(式)）	

L'	$l_i' = \quad \cdots \cdot i_k(l_i l_j)j_{l+2} \cdot \cdots \cdot j_l(l_j l_i)i_{k+2} \cdot \cdots$	(1')
	$l_u = u_1(l_u)u_2 \cdot \cdots \cdot u_v(l_u)u_1 \quad (u \neq i)$	
L 2	$L_1, \cdots, L_{n-2}$	

References

[1] H. Seifert & W. Threlfall : A Textbook of Topology, Translated by M.A. Goldman, Academic Press, Inc. 1980

[2] M. Yamashita : DS-diagram and Heegaard diagram(In Japanese), Reports on a meeting at R.I.M.S. Kyoto Univ., No. 636, 1985, 28-41.

[3] ____________ : On elementary DS-deformations(In Japanese), Bulletin of Hakone Seminar, " Low Dimensional PL Topology" , 1986, 13-34.

[4] H. Ikeda & M. Yamashita & K. Yokoyama : Deformations of DS-diagrams, Topology and Computer Science(1987) edited by S. Suzuki, 81-138., Kinokuniya Company Ltd. Tokyo

[5] S. Horiguchi : Transformations of Heegaard diagrams(In Japanese), Bulletin of Hakone Seminar, " Low Dimensional PL Topology" , 1990, 63-109.

[6] ____________ : A new presentation of the fundamental group associated with the Heegaard diagram, Bulletin of Niigata Sangyo Univ., No. 7, 1992, 137-177.

[7] ____________ : Reductions of Heegaard diagrams of S^3 without waves and its fundamental groups, Bulletin of Niigata Sangyo Univ., No. 8, 1992, 157-219.

[8] T. Kaneto : On presentations of the fundamental group of the 3-sphere associated with Heegaard diagrams, J. Math. Soc. Japan, vol. 33, No. 1, 1981, 147-158.

[9] T. Homma & M. Ochiai & M. Takahashi : An algorithm for recognizing S^3 in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus two, Osaka J. Math. 17, 1980, 625-648.

[10] Hempel, J. : 3-manifolds, Ann. of Math. Studies 86, Princeton Univ. Press.(1976)