

Heegaard diagram の細分 から得られる基本群の表示

堀口 俊二 (青森大・経営)

Contents

- §1. Heegaard diagram and polygram
- §2. Heegaard diagram の細分から得られる基本群の表示
- §3. Proofs of theorem A and B (in §2)
- §4. Examples

§1. Heegaard diagram and Polygram

定義1 genus n handlebody U において, 互いに disjoint な n 個の proper 2-disks D_1, \dots, D_n を選んで, $U - (D_1 \cup \dots \cup D_n)$ が連結なとき, 各 D_i を U の meridian-disk. $\{D_1, \dots, D_n \mid \text{各 } D_i \text{ は } U \text{ の proper disk}, D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j\}$ を U の meridian-disk 系, $\{\partial D_1, \dots, \partial D_n\}$ を meridian 系とよぶ.

定義2 連結可付向閉3-多様体 M^3 は, M^3 に含まれる 2つの genus $n (\geq 0)$ handlebodies U, V の和; $M^3 = U \cup V$, $U \cap V = \partial U \cap \partial V = F$ (genus n の閉曲面) と表わされる. $(U, V; F)$ を M^3 の genus n の Heegaard splitting といい, F を Heegaard surface と呼ぶ. さらに 2つの genus n handlebodies U, V があって, それらの境界 ∂U から ∂V への同相写像 $f: \partial U \rightarrow \partial V$ が与えられたとき, ∂U の各点 p と $f(p)$ を同一視して連結可付向閉3-多様体 M^3 が得られる. このとき 4つの組 $(M^3; U, V, f)$ を f に関する Heegaard splitting と呼ぶ.

以下断りのない限り, 閉3-多様体 M^3 は連結可付向閉3-多様体を表す.

定義3 $(U, V; F)$ (resp. $(M^3; U, V, f)$) を M^3 の genus n Heegaard splitting とする. U, V の meridian-disk 系をそれぞれ $\{D_1, \dots, D_n\}$, $\{D_1', \dots, D_n'\}$ とする. $(U; \partial D_1', \dots, \partial D_n')$ (resp. $(U; f^{-1}(\partial D_1'), \dots, f^{-1}(\partial D_n'))$) あるいは

$(V; \partial D_1, \dots, \partial D_n)$ (resp. $(V; f(\partial D_1), \dots, f(\partial D_n))$) を Heegaard splitting $(U, V; F)$ (resp. $(M^3; U, V, f)$) の genus n Heegaard diagram とよぶ.

$(U; \partial D_1', \dots, \partial D_n')$ (resp. $(U; f^{-1}(\partial D_1'), \dots, f^{-1}(\partial D_n'))$) の $\{\partial D_1', \dots, \partial D_n'\}$ (resp. $\{f^{-1}(\partial D_1'), \dots, f^{-1}(\partial D_n')\}$) を longitude 系と呼ぶ.

$(M^3; U, V, f)$ において, $f^{-1}(V)$ を再び V におきかえて, f^{-1} を恒等写像とみなせるから, Heegaard diagram $(U; f^{-1}(\partial D_1'), \dots, f^{-1}(\partial D_n'))$ の $\{f^{-1}(\partial D_1'), \dots, f^{-1}(\partial D_n')\}$ は V の meridian 系 と考えてよい.

$(U; \partial D_1', \dots, \partial D_n'), (V; \partial D_1, \dots, \partial D_n)$ を M^3 の $(U, V; F)$ の Heegaard diagrams とする. 今後 $(\partial D_1' \cup \dots \cup \partial D_n') \cap (\partial D_1 \cup \dots \cup \partial D_n)$ は一般の位置の議論により有限個の点より成るものとする.

定義 4 genus n Heegaard diagram $(U; \partial D_1', \dots, \partial D_n')$ において,

$\{D_1 \cup \dots \cup D_n\} \cap \{D_1' \cup \dots \cup D_n'\} = \{\partial D_1 \cup \dots \cup \partial D_n\} \cap \{\partial D_1' \cup \dots \cup \partial D_n'\}$ は, points であるが, この points の数を Heegaard diagram の 交点数 とよぶ.

次に Heegaard diagram の細分の定義を与える.

$(U; \partial D_1', \dots, \partial D_n'), (V; \partial D_1, \dots, \partial D_n)$ を M^3 の Heegaard splitting $(U, V; F)$ の Heegaard diagrams とする. $\partial D_i' = l_i, \partial D_i = m_i (i=1, \dots, n)$ は向き付けられているとする. 互いに交わらない ∂U の 1-球面 $\{\partial D_1, \dots, \partial D_n\}$ は ∂U の各 1-球面 $\partial D_i'$ を 1-cells に分解する. $\partial D_i'$ にあるこれらの 1-cells に $\partial D_i'$ の向きに従って $\partial D_i' = l_i = l_{i1} \cup l_{i2} \cup \dots \cup l_{ik}$ となるように labels $l_{i1}, l_{i2}, \dots, l_{ik}$ をこれらの順に付ける(最初の l_{i1} は $\partial D_i'$ の 1-cells から任意に選ばれる). 各 l_{ij} は $\partial D_i'$ と同じ向きをもつとする. 反対に, 互いに交わらない ∂U の 1-球面 $\{\partial D_1, \dots, \partial D_n\}$ は ∂U の各 1-球面 ∂D_j を 1-cells に分解する. ∂D_j にあるこれらの 1-cells に ∂D_j の向きに従って $\partial D_j = m_j = m_{j1} \cup m_{j2} \cup \dots \cup m_{jq}$ となるように labels $m_{j1}, m_{j2}, \dots, m_{jq}$ をこれらの順に付ける. 各 m_{ji} は ∂D_j と同じ向きをもつとする.

U を meridian disks $D_j (j=1, \dots, n)$ で切ると, 3-ball B_U^3 を得る. ∂B_U^3 は 2-球面 S_U^2 であるが, S_U^2 には U を $D_j (j=1, \dots, n)$ で切ることができる切断面の n 個の対の disks $\{D_j^+, D_j^-\} (j=1, \dots, n)$ がある. ∂D_j^+ と ∂D_j^- は ∂D_j の同じ 1-cells によって分割されるから, それらは向き付けられた同じ labels

$m_{j_1}, m_{j_2}, \dots, m_{j_n}$ を持つ. それ故 2-球面 S_0^2 上には $\partial D_j^+ = m_j = m_{j_1} \cup m_{j_2} \cup \dots \cup m_{j_n}$,
 $\partial D_j^- = m_j = m_{j_1} \cup m_{j_2} \cup \dots \cup m_{j_n}$, $\partial D_i' = l_i = l_{i_1} \cup l_{i_2} \cup \dots \cup l_{i_k}$ ($i, j=1, \dots, n$)となるよう
 な向き付けられた, label を付けられた 1-cells からなる 3-regular graph がある.

定義5 2-球面 S_0^2 にある 3-regular graph

$$\{ \partial D_i' = l_i = l_{i_1} \cup \dots \cup l_{i_k}, \partial D_j^+ = m_j = m_{j_1} \cup \dots \cup m_{j_n}, \partial D_j^- = m_j = m_{j_1} \cup \dots \cup m_{j_n} \}$$

($i, j=1, \dots, n$) (ただし, k, n は i, j により一般に異なる)

は Heegaard diagram $(U; \partial D_1', \dots, \partial D_n')$ の細分と呼ばれ $H_U(D_1, \dots, D_n)$ と記述
 される. 同様に Heegaard diagram $(V; \partial D_1, \dots, \partial D_n)$ の細分 $H_V(D_1', \dots, D_n')$ が
 定義され $H_U(D_1', \dots, D_n') = \{ \partial D_j = m_j = m_{j_1} \cup \dots \cup m_{j_n}$,

$$\partial D_i'^+ = l_i = l_{i_1} \cup \dots \cup l_{i_k}, \partial D_i'^- = l_i = l_{i_1} \cup \dots \cup l_{i_k} \}$$

($i, j=1, \dots, n$)

と表示される. $H_U(D_1, \dots, D_n) \cup H_V(D_1', \dots, D_n')$ は Heegaard diagrams

$(U; \partial D_1', \dots, \partial D_n')$ と $(V; \partial D_1, \dots, \partial D_n)$ の細分の対と呼ばれる.

$H_U(D_1, \dots, D_n)$ (resp. $H_V(D_1', \dots, D_n')$) を単に Heegaard diagram と呼ぶこともある.

例1 図1 は 3-球面 S^3 の genus 2 Heegaard diagrams $(U; l_1, l_2), (V; m_1, m_2)$
 およびそれらの細分 $H_U(D_1, D_2), H_V(D_1', D_2')$ である.

定義6 $H_U(D_1, \dots, D_n)$ ($n \geq 2$) の 1-cells $\{l_{i_1}, \dots, l_{i_k}\}$ ($i=1, \dots, n$) の中から l_{i_j} を,
 U の meridian disks $\{D_1, \dots, D_n\}$ を連結とするように選んで来れるとき,

Heegaard diagram $(U; l_1, \dots, l_n)$ は $\{D_1, \dots, D_n\}$ に関して連結であるという. また

連結とするように選んで来れないとき, $(U; l_1, \dots, l_n)$ は $\{D_1, \dots, D_n\}$ に関して

非連結であるという. genus 1 の Heegaard diagram を持つ可付向閉3-多様体 M^3 は

S^3 , Lens space $L(p, q)$, $S^2 \times S^1$ であるが, このうち S^3 と $L(p, q)$ の Heegaard
 diagram は連結と定義する. $S^2 \times S^1$ の Heegaard diagram は非連結と定義する.

定義7 $(U; l_1, \dots, l_n)$ を $(U, V; F)$ の Heegaard diagram とする. U の meridian
 disks を $\{D_1, \dots, D_n\}$ とする. meridian disks の一部分 $\{\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_k\}$ と

longitude 系の一部分 $\{\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_k\}$ に対して, $(\hat{D}_1 \cup \dots \cup \hat{D}_k) \cup (\hat{l}_1 \cup \dots \cup \hat{l}_k)$ が連結
 となるとき, これを $(U; l_1, \dots, l_n)$ の $\{D_1, \dots, D_n\}$ に関する連結成分という.

定義8 $S^2 - |H_U(D_1, \dots, D_n)| = \cup_{j=1}^n (\text{Int } D_j^+ \cup \text{Int } D_j^-)$ の connected components の closure が 2-cells となるとき, $H_U(D_1, \dots, D_n)$ は $\{D_1, \dots, D_n\}$ に関して連結という. 連結にはならないとき, $\{D_1, \dots, D_n\}$ に関して非連結という.

定義9 Heegaard diagrams の細分の対を $H_U(D_1, \dots, D_n) \cup H_U(D_1', \dots, D_n')$ とする. $H_U(D_1, \dots, D_n)$ および $H_U(D_1', \dots, D_n')$ は定義5 の表示とする. U の各 meridian disk D_j の中心点を P_j とする. D_j^+ および D_j^- の中心点をそれぞれ P_j^+, P_j^- とする. 2-球面 S^2 上の $H_U(D_1, \dots, D_n)$ において, disks $D_j^+, D_j^- (j=1, \dots, n)$ がその中心点 P_j^+, P_j^- に contract するように変形すると, $H_U(D_1, \dots, D_n)$ は変形されて vertices が $\{P_1^+, P_1^-, \dots, P_n^+, P_n^-\}$, edges が $\{l_{i,1}, \dots, l_{i,k}\} (i=1, \dots, n)$ からなる S^2 上の graph になる. P_j^+ と P_j^- を同じ label P_j で表す. これを Whitehead graph (単に W-graph) と呼び $WG_U(P_1, \dots, P_n)$ と表す.

この $H_U(D_1, \dots, D_n)$ の変形に対応して, $H_U(D_1', \dots, D_n')$ は, $\partial D_j = m_{j,1} \cup m_{j,2} \cup \dots \cup m_{j,q}$ の各 $m_{j,i}$ が一点 $P_{m_{j,i}}$ に contract するように変形される. これらの点 $\{P_{m_{j,1}}, \dots, P_{m_{j,q}}\}$ を同一の label P_j で表す. S^2 上のこの graph を $WG_U(P_1, \dots, P_n)$ の対の graph と呼び, $WG_U(P_1, \dots, P_n)$ で表す.

例2 図2 は図1 の $H_U(D_1, D_2)$ から得られる $WG_U(P_1, P_2)$ およびその対 $WG_U(P_1, P_2)$ である.

定義10 $H_U(D_1, \dots, D_n)$ が連結なとき, $WG_U(P_1, \dots, P_n)$ は連結という. 連結でないとき 非連結という.

例3 図3 は $S^2 \times S^1$ の genus 4 の連結な Heegaard diagram $(U; l_1, l_2, l_3, l_4)$ の非連結な細分 $H_U(D_1, D_2, D_3, D_4)$ である. またその W-graph も非連結である.

$H_U(D_1, \dots, D_n)$ が連結ということ, その W-graph $WG_U(P_1, \dots, P_n)$ が連結であるということは同義である. また $H_U(D_1, \dots, D_n)$ が連結ならば Heegaard diagram $(U; l_1, \dots, l_n)$ は連結である. しかしこの逆は例3 のように一般には成立しない. Heegaard genus = 1 のときには $(U; l_1)$ が連結ということ, $H_U(D_1)$ が連結ということとは同義である.

定義 1 1 2-球面 S^2 上の connected graph を $G=(V;E)$ とする. ここで V は G の vertices, E は G の edges の集合である. $S^2 - |G|$ の connected components の closure は 2-cells の集合であり, これを F とする. そのとき S^2 は V, E, F の各要素を 0-, 1-, 2-cell とする cell structure を自然にもつ. 各 cell には orientation を入れておく. このように考えたときの oriented cell complex $K=VUEUF$ を P-complex と呼ぶ.

定義 1 2 S^2 上の connected graph を $G=(V;E)$, P-complex を $K=VUEUF$ とする. P-complex K が次の条件を満たすとする:

- (1) $\{v_i, v_i', v_i'', \dots\}$ ($i=1, \dots, \alpha^0$) は同じ label が付いている V の 0-cells である.
 $\{e_i, e_i', e_i'', \dots\}$ ($i=1, \dots, \alpha^1$) は同じ label が付いている E の 1-cells である.
 $\{f_i, f_i'\}$ ($i=1, \dots, \alpha^2, \alpha^2 \geq 1$) は同じ label が付いている F の 2-cells である. (注. $i \neq j$ ならば異なる label が付く)
 - (2) F の各 2-cells に対して, 同じ label が付けられてる 2-cells $\{f_i, f_i'\}$ ($\partial f_i \cap \partial f_i' = \emptyset$ or $\partial f_i \cap \partial f_i' \neq \emptyset$) の f_i と f_i' の向きは反対であり, ∂f_i 上の 1-cells の個数と, $\partial f_i'$ 上の 1-cells の個数は等しい.
 - (3) (2) の f_i と f_i' の貼合わせとその boundary ∂f_i と $\partial f_i'$ 上の 0-cells および 1-cells どうしの貼合わせは, 0-cells および 1-cells の labels および各 1-cells の向きも含めて f_i と f_i' の貼合わせと compatible である.
- 同じ label のついた 0-cells, 1-cells, 2-cells を同一視する写像を f とする. このとき $\Lambda=(G, f)$ を polygram とよぶ. (polygram の定義は [1],[3] に詳しくかいてある).

Heegaard diagrams の細分の対を $H_U(D_1, \dots, D_n) \cup H_U(D_1', \dots, D_n')$ とする. $H_U(D_1, \dots, D_n) (\subset S_U^2)$ と $H_U(D_1', \dots, D_n') (\subset S_U^2)$ は連結であり, それぞれ定義 5 の表示とする. $(S_U^2 - |H_U(D_1, \dots, D_n)|) - \bigcup_{j=1}^n (\text{Int } D_j^+ \cup \text{Int } D_j^-)$ の connected components の closure の 2-cells を, $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ とし, 各 2-cell の名前を label とする. 各 2-cell σ_i には向きを入れておく.
 $(S_U^2 - |H_U(D_1, \dots, D_n)|) - \bigcup_{i=1}^n (\text{Int } D_i'^+ \cup \text{Int } D_i'^-)$ の connected components の closure の 2-cells には $\partial U = \partial V$ であるから,

$\sigma_1, \dots, \sigma_p$ と同じ label が付けられる. D_{j^+} と D_{j^-} (resp. $D_i'^+$ と $D_i'^-$) には反対となる向きを入れ, もとの disk D_j (resp. disk D_i') と同じ label を付ける.

$\{\partial D_1 \cup \dots \cup \partial D_n\} \cap \{\partial D_1' \cup \dots \cup \partial D_n'\} (\subset \partial U = \partial V)$ は points である. その中の一つを X とする. $H_U(D_1, \dots, D_n)$ には 同じ label の 1-cell m_{ji} が (D_{j^+} と D_{j^-} に)二つあるから, 点 X が, $X \subset \partial m_{ji}$ となっていれば, $H_U(D_1, \dots, D_n)$ には頂点の名前 X がそのまま label として二つ存在する. また $H_U(D_1', \dots, D_n')$ には label m_{ji} のついた 1-cell が一つあり, ∂m_{ji} は $\partial D_i'^+$ および $\partial D_i'^-$ になければならないから, 頂点の名前 X がそのまま label として二つ表れている. 従って M^3 は二つの 3-balls B_U^3 の境界 S_U^2 と B_V^3 の境界 S_V^2 を, 同じ label の四つの 0-cells, 同じ label の三つの 1-cells, 同じ label の二つの 2-cells を同一視して得られると考えることができる. この同一視する写像を f とする. 以上で次の命題がなりたつことがわかる.

命題 可付向閉3-多様体 M^3 の Heegaard splitting $(U, V; F)$ の genus $n (\geq 1)$ Heegaard diagrams を $(U; l_1, \dots, l_n), (V; m_1, \dots, m_n)$ とする. これらの細分を $H_U(D_1, \dots, D_n), H_V(D_1', \dots, D_n')$ とし, かつ連結とする. すると $(H_U(D_1, \dots, D_n) \cup H_V(D_1', \dots, D_n'), f)$ は連結性を除いて(連結成分は2) polygram の条件を満たす.

§ 2. Heegaard diagram の細分から得られる基本群の表示

$(U; \partial D_1', \dots, \partial D_n') = (U; l_1, \dots, l_n)$ を $(U, V; F)$ の genus $n (\geq 1)$ Heegaard diagram とする. その細分 $H_U(D_1, \dots, D_n)$ は定義5の表示とし, 連結とする. このとき Heegaard diagram は連結であるから, $n-1$ 個の 1-cells l_{ij} で, U の n 個の meridian disks $\{D_1, \dots, D_n\}$ を結ぶものが選んでくれる(選びかたは一般に一通りではない). これらを L_1, \dots, L_{n-1} とする.

$S_U^2 - l_{ij} \cup H_U(D_1, \dots, D_n) \cup U_{j^+} \cup U_{j^-} (\text{Int } D_{j^+} \cup \text{Int } D_{j^-})$ の connected components の closure は 2-cells となるが, これらを $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ とする.

我々は 1-cells を表す記号 l_{ij} を基本群の生成元の記号として併用する.

定理A. 可付向閉3-多様体 M^3 の genus $n(\geq 2)$ の Heegaard diagram を $(U; l_1, \dots, l_n)$ とする. $(U; l_1, \dots, l_n)$ の細分 $H_U(D_1, \dots, D_n)$ は U の meridian disks $\{D_1, \dots, D_n\}$ に関して連結とする. このとき M^3 の基本群 $\pi_1(M^3)$ は, $l_{i1}, \dots, l_{ik} (i=1, \dots, n)$ を生成元とする. 関係式は, $L_1=1, \dots, L_{n-1}=1$ および各 2-cell σ_i の境界 $\partial \sigma_i$ 上の 1-cells l_{ij} を, m_{ij} を省略して正の向き (または負の向き) に続けて読んだ語 (ward) (どこから読み始めてもよい. l_{ij} の向きと反対に読むときは l_{ij}^{-1} と読む.) と $l_{i1}l_{i2}\dots l_{ik}=1 (i=1, \dots, n)$ となる.

先に定理A の例を与える.

例4 図1 の Heegaard diagram の細分 $H_U(D_1, D_2)$ から得られる S^3 の基本群 $\pi_1(S^3)$ の表示は以下のようなになる: ここでは $L_1=l_{23}=1$ を入れる.

$\pi_1(S^3)=$

$$\langle l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{15} \quad \left| \quad \begin{array}{l} L_1=l_{23}=1, l_{24}l_{13}^{-1}=1, l_{13}l_{25}^{-1}=1, l_{25}l_{14}^{-1}=1 \\ l_{14}l_{26}^{-1}=1, l_{23}l_{12}^{-1}=1, l_{15}l_{21}^{-1}l_{23}l_{26}^{-1}=1 \\ l_{15}l_{27}^{-1}=1, l_{21}l_{11}^{-1}=1, l_{11}l_{22}^{-1}=1 \\ l_{12}l_{24}^{-1}l_{27}l_{22}^{-1}=1, l_{11}l_{12}l_{13}l_{14}l_{15}=1 \\ l_{21}l_{22}l_{23}l_{24}l_{25}l_{26}l_{27}=1 \end{array} \right. \rangle$$

定理A の基本群の表示を

$$\pi_1(M^3) = \langle l_{ij} \mid L_1=1, \dots, L_{n-1}=1, r_1=1, \dots, r_p=1, l_{i1}\dots l_{ik}=1 \rangle (i=1, \dots, n)$$

と表す. ここで関係子 r_i は $\partial \sigma_i$ 上の 1-cells l_{ij} を続けて読んだ語である.

この基本群の表示において, 関係子 $\{r_1, \dots, r_p, l_{i1}\dots l_{ik}\} (i=1, \dots, n)$ には向きを除いて同じ文字(label) l_{ij} が 3個ずつあることになる.

系1 $H_U(D_1, \dots, D_n)$ の対 $H_U(D_1', \dots, D_n')$ から $\{m_{j1}, \dots, m_{j2}\} (j=1, \dots, n)$ による基本群の表示が可能である.

系2 genus 1 の連結な Heegaard diagram をもつ可付向閉3-多様体 M^3 の基本群 $\pi_1(M^3)$ は, l_{i1}, \dots, l_{ik} を生成元とする. 関係式は各 2-cell σ_i の境界 $\partial \sigma_i$ 上の 1-cells l_{ij} を m_{ij} を省略して続けて読んだ語と $l_{i1}\dots l_{ik}=1$ となる.

例5 図4は Lens space $L(7,2)$ の Heegaard diagram $(U; l_1), (V; m_1)$ とそれらの細分 $H_U(D_1), H_U(D_1')$ である. $H_U(D_1)$ から得られる基本群は次のようになる.

$$\pi_1(L(7,2)) = \langle l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14} \mid \begin{array}{l} l_{11}l_{14}^{-1}=1, l_{14}l_{17}^{-1}=1, l_{17}l_{13}^{-1}=1 \\ l_{13}l_{16}^{-1}=1, l_{16}l_{12}^{-1}=1, l_{12}l_{15}^{-1}=1 \\ l_{11}l_{15}^{-1}=1, l_{11}l_{12}l_{13}l_{14}l_{15}l_{16}l_{17}=1 \end{array} \rangle$$

次に $H_U(D_1, \dots, D_n)$ が非連結な場合の基本群の表示を与える.

$(U; \partial D_1', \dots, \partial D_n') = (U; l_1, \dots, l_n)$ を $(U, V; F)$ の genus $n (\geq 1)$ Heegaard diagram とする. その細分 $H_U(D_1, \dots, D_n)$ は定義5の表示とし, 非連結とする.

$(S_U^2 - |H_U(D_1, \dots, D_n)|) - \cup_{j=1}^n (\text{Int } D_j^+ \cup \text{Int } D_j^-)$ の connected components の closure の 2-cells ではないものを $\xi_1, \dots, \xi_g (g \geq 1)$ とする. ξ_i において, 1-cells $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iti}$ で以下の条件を満たすものをとる:

- (1) 各 1-cell X_{ij} は適当に向き付けられている.
 (2) $\text{Int } X_{ij} \subset \text{Int } \xi_i$ であり, $\partial X_{ij} = \{Q_i, Q_j\}$ ($Q_i \neq Q_j$) とすると,

$$Q_i \subset l_{ij} \subset \partial \xi_i, Q_j \subset l_{kj} \subset \partial \xi_i (l_{ij} \neq l_{kj})$$

$$\text{or } Q_i \subset l_{ij} \subset \partial \xi_i, Q_j \subset m_{kj} \subset \partial \xi_i$$

$$\text{or } Q_i \subset m_{ij} \subset \partial \xi_i, Q_j \subset m_{kj} \subset \partial \xi_i (m_{ij} \neq m_{kj})$$

のいずれかを満たす.

- (3) $\xi_i - (\text{Int } X_{i1} \cup \dots \cup \text{Int } X_{iti})$ の connected components の closure は 2-cells となり, これらの 2-cells の個数が最小となる.

すると $H_U(D_1, \dots, D_n) \cup (U_{i=1}^g (X_{i1} \cup X_{i2} \cup \dots \cup X_{iti}))$ は連結となる.

$U_{i=1}^g \{\partial X_{i1}, \dots, \partial X_{iti}\}$ は points である. これらの points の内で

$\{P_{ij1}, \dots, P_{ij\beta_i}\} \subset \text{Int } l_{ij}, \{P_{j11}, \dots, P_{j1\alpha_j}\} \subset \text{Int } m_{j1}$ となるときは, これらの points で l_{ij}, m_{j1} は $l_{ij} = l_{ij1} \cup \dots \cup l_{ij\beta_i+1}, m_{j1} = m_{j11} \cup \dots \cup m_{j1\alpha_j+1}$ と

1-cells に分割される. $H_U(D_1, \dots, D_n)$ において, このように分割される l_{ij}, m_{j1}

が生じたときは l_{ij}, m_{j1} の代わりに右辺の分割された 1-cells l_{ijk}, m_{jik} に置き

換える. 分割された 1-cells l_{ijk}, m_{jik} はもとの l_{ij}, m_{j1} と同じ向きを持つと

する. $H_U(D_1, \dots, D_n)$ からこのようにして構成したものを $H_U'(D_1, \dots, D_n)$ とする:

$$H_U'(D_1, \dots, D_n) = \{ \partial D_j^+ = m_{j1} \cup \dots \cup m_{j\alpha_j}, \partial D_j^- = m_{j1} \cup \dots \cup m_{j\alpha_j}, \partial D_i' = l_{i1} \cup \dots \cup l_{i\beta_i}$$

$$, l_{uv} = l_{uv1} \cup \dots \cup l_{uv\beta_u}, m_{xy} = m_{xy1} \cup \dots \cup m_{xy\alpha_x} \}$$

$$(i=1, \dots, n-\alpha, j=1, \dots, n-\beta, u=1, \dots, \alpha, x=1, \dots, \beta)$$

$H_U'(D_1, \dots, D_n)$ は $H_U(D_1, \dots, D_n)$ の構造および $U_{i=1}^n (X_{i1} \cup \dots \cup X_{it_i})$ の X_{ij} の取り方により、 $H_U'(D_1, \dots, D_n) = H_U(D_1, \dots, D_n)$ となる場合もある。

$H_U'(D_1, \dots, D_n) \cup (U_{i=1}^n (X_{i1} \cup \dots \cup X_{it_i}))$ は連結であるから、 U の meridian disks $\{D_1, \dots, D_n\}$ および points $U_{i=1}^n \{\partial X_{i1}, \dots, \partial X_{it_i}\}$ を結ぶ連結 path (= tree=木) を $H_U'(D_1, \dots, D_n) \cup (U_{i=1}^n (X_{i1} \cup \dots \cup X_{it_i}))$ の 1-cells から次のように構成する：

a) $(U; l_1, \dots, l_n)$ が連結なとき

$$(L_1 \cup \dots \cup L_{n-1}) \cup (U(l_{i_{j_1}}' \cup \dots \cup l_{i_{j_{s_1}}}')')$$

とする。ここで、 $\{L_1, \dots, L_{n-1}\}$ は $\{l_{i_1}, \dots, l_{i_k}\}$ ($i=1, \dots, n$) の中から選ばれた 1-cells であり、disks $\{D_1, \dots, D_n\}$ を結んでいる。ただし、

$L_i = l_{i_j} = l_{i_{j_1}} \cup \dots \cup l_{i_{j_{s_1}}}$ のとき、 L_i の代わりに $\{l_{i_{j_1}}, \dots, l_{i_{j_{s_1}}}\}$ を取る。

$\{l_{i_{j_1}}', \dots, l_{i_{j_{s_1}}}'\}$ は $l_{i_j} \neq l_k$ のとき、 l_{i_j} が $l_{i_j} = l_{i_{j_1}} \cup \dots \cup l_{i_{j_{s_1}}}$ に分割されていれば、 l_{i_j} の分割点までの path になるように、右辺の 1-cells $\{l_{i_{j_1}}, \dots, l_{i_{j_{s_1}}}\}$ の中から選ばれたものである。

b) $(U; l_1, \dots, l_n)$ が非連結なとき

$$(L_1 \cup \dots \cup L_h) \cup (U(l_{i_{j_1}}' \cup \dots \cup l_{i_{j_{s_1}}}')') \cup (U_{i=1}^n (X_{i1} \cup X_{i2} \cup \dots \cup X_{it_i}))$$

$$(0 \leq h < n-1)$$

とする。ここで、 L_i は $U_{i=1}^n \{l_{i_1}, \dots, l_{i_k}\}$ ($i=1, \dots, n$) の中から以下のようにして選ばれた 1-cell である：

$(U; l_1, \dots, l_n)$ の連結成分を C_1, \dots, C_r ($r \geq 2$) とする。

$$\{L_1, \dots, L_h\} = U \left\{ l_{i_j} \mid \begin{array}{l} l_{i_j} \text{ は } C_i \text{ に含まれる } n_i \text{ 個の } U \text{ の meridian disks} \\ \text{を結ぶ } n_i - 1 \text{ 個の 1-cell, } 1 \leq i \leq r, n_1 + \dots + n_r = n \end{array} \right.$$

ただし、

$L_i = l_{i_j} = l_{i_{j_1}} \cup \dots \cup l_{i_{j_{s_1}}}$ のとき、 L_i の代わりに $\{l_{i_{j_1}}, \dots, l_{i_{j_{s_1}}}\}$ を取る。

$\{l_{i_{j_1}}', \dots, l_{i_{j_{s_1}}}'\}$ は $l_{i_j} \neq l_k$ のとき、 l_{i_j} が $l_{i_j} = l_{i_{j_1}} \cup \dots \cup l_{i_{j_{s_1}}}$ に分割されていれば、 l_{i_j} の分割点までの path になるように、右辺の 1-cells $\{l_{i_{j_1}}, \dots, l_{i_{j_{s_1}}}\}$ の中から選ばれたものである。

$S_U^2 - |H_U'(D_1, \dots, D_n)| - U_{j=1}^n (\text{Int } D_j^+ \cup \text{Int } D_j^-) - U_{i=1}^n (X_{i1} \cup \dots \cup X_{it_i})$ の connected components の closure の 2-cells を $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ とする。

定理B. 可付向閉3-多様体 M^3 の genus $n (\geq 1)$ Heegaard diagram を $(U; l_1, \dots, l_n)$ とする. その細分 $H_U(D_1, \dots, D_n)$ は非連結とする. このとき M^3 の基本群 $\pi_1(M^3)$ は, $H_U(D_1, \dots, D_n) \cup (U; i=1, \dots, \alpha (X_{i1} U \dots U X_{in_i}))$ から以下のように読み取って表示される:

a) $(U; l_1, \dots, l_n)$ が連結のとき

生成元は $l_{i1}, \dots, l_{ik} (i=1, \dots, n-\alpha)$, $l_{uv1}, \dots, l_{uv\alpha} (u=1, \dots, \alpha)$, X_{ij} である.

関係式は $L_i=1, \dots, L_{n-1}=1$ および各 2-cell σ_i の境界 $\partial \sigma_i$ の回りを l_{ij} ,

l_{uv1} , X_{ij} を m_{ij} , m_{xyi} を省略して順に続けて読んだ語と $l_{i1} l_{i2} \dots l_{ik}=1$

$(i=1, \dots, n)$ となる. ただし, $L_i=l_{ij}=l_{j1} U \dots U l_{jsi}$ のときには, $L_i=1$ の代わりに $l_{j1}=1, \dots, l_{jsi}=1$ を関係式とする.

$l_{ij}=l_{j1} U \dots U l_{jsi} (l_{ij} \neq l_k)$ のときには, l_{ij} の分割点に至る 1-cells

$\{l_{j1}', \dots, l_{jsi}'\}$ に対して, $l_{j1}'=1, \dots, l_{jsi}'=1$ を関係式とする.

b) $(U; l_1, \dots, l_n)$ が非連結のとき

生成元は $l_{i1}, \dots, l_{ik} (i=1, \dots, n-\alpha)$, $l_{uv1}, \dots, l_{uv\alpha} (u=1, \dots, \alpha)$ である.

関係式は $L_h=1, \dots, L_n=1 (0 \leq h < n-1)$ および各 2-cell σ_i の境界 $\partial \sigma_i$ の回りを

l_{ij} , l_{uv1} を m_{ij} , m_{xyi} , X_{ij} を省略して順に続けて読んだ語と

$l_{i1} l_{i2} \dots l_{ik}=1 (i=1, \dots, n)$ となる. ただし, $L_i=l_{ij}=l_{j1} U \dots U l_{jsi}$ のときには,

$L_i=1$ の代わりに $l_{j1}=1, \dots, l_{jsi}=1$ を関係式とする.

$l_{ij}=l_{j1} U \dots U l_{jsi} (l_{ij} \neq l_k)$ のときには, l_{ij} の分割点に至る 1-cells

$\{l_{j1}', \dots, l_{jsi}'\}$ に対して, $l_{j1}'=1, \dots, l_{jsi}'=1$ を関係式とする.

定理B の基本群の表示を次のように表す.

$$a) \quad \pi_1(M^3) = \langle l_{ij}, l_{uvr} \mid \begin{array}{l} L_i=1, \dots, L_{n-1}=1, r_1=1, \dots, r_p=1, l_{i1} \dots l_{ik}=1 \\ X_{kq} \quad (L_u=l_{uv}=l_{uv1} \dots l_{uv\alpha} \rightarrow) l_{uv1}=1, \dots, l_{uv\alpha}=1 \\ (l_{uv}=l_{uv1} \dots l_{uv\alpha} (l_{uv} \neq l_k) \rightarrow) l_{uv1}'=1, \dots, l_{uv\alpha}'=1 \end{array} \rangle$$

$(i=1, \dots, n-\alpha, u=1, \dots, \alpha)$

$$b) \quad \pi_1(M^3) = \langle l_{ij}, l_{uvr} \mid \begin{array}{l} L_h=1, \dots, L_n=1, r_1=1, \dots, r_p=1, l_{i1} \dots l_{ik}=1 \\ (L_u=l_{uv}=l_{uv1} \dots l_{uv\alpha} \rightarrow) l_{uv1}=1, \dots, l_{uv\alpha}=1 \\ (l_{uv}=l_{uv1} \dots l_{uv\alpha} (l_{uv} \neq l_k) \rightarrow) l_{uv1}'=1, \dots, l_{uv\alpha}'=1 \end{array} \rangle$$

$(i=1, \dots, n-\alpha, u=1, \dots, \alpha, 0 \leq h < n-1)$

例6 図5の $(U; l_1)$ は $S^2 \times S^1$ の非連結な Heegaard diagram であり, その細分 $H_U(D_1)$ も非連結である. $H_U(D_1)$ の $\partial D_1^+ = m_1$ と l_1 を結ぶ 1-cell を X_1 とし, $\partial D_1^- = m_1$ と l_1 を結ぶ 1-cell を X_2 とする. l_1 は点 2, 3 により $l_1 = l_{11} \cup l_{12}$ に分割される. m_1 は点 1, 4 により $m_1 = m_{11} \cup m_{12}$ に分割される.

$H_U'(D_1) \cup X_1 \cup X_2$ から読み取れる $S^2 \times S^1$ の基本群は次のようになる.

$$\pi_1(S^2 \times S^1) = \langle l_{11}, l_{12} \mid l_{11} l_{12} = 1 \rangle \approx \mathbb{Z}$$

例7 図6の実線は S^3 の genus 4 の非連結な Heegaard diagram $(U; l_1, \dots, l_4)$ である. 点線の X_{11}, X_{12} を追加して $H_U'(D_1, D_2, D_3, D_4) \cup X_{11} \cup X_{12}$ が構成される. $WG_U'(P_1, P_2, P_3, P_4) \cup X_{11} \cup X_{12}$ の points は $\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14\}$ と全部で 12 個である(1, 2, 3, 4 は各々二つずつある). このうち 4 つの points $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ および points 11, 12, 13, 14 を結ぶ連結 path (= tree = 木) を $l_{131} \cup l_{132} \cup l_{133} \cup X_{11} \cup X_{12} \cup l_{31} \cup l_{41}$ とする. すると基本群は次のようになる.

$$\pi_1(S^3) = \langle \begin{array}{l} l_{11}, l_{12}, l_{131}, l_{132}, l_{133} \\ l_{14}, l_{15}, l_{21}, l_{22}, l_{23} \\ l_{31}, l_{32}, l_{41}, l_{42} \end{array} \mid \begin{array}{l} l_{14} l_{22}^{-1} = 1, l_{22} l_{12}^{-1} = 1, l_{14} l_{15}^{-1} l_{23} l_{12}^{-1} = 1 \\ l_{11} l_{133}^{-1} l_{42} l_{42}^{-1} l_{41}^{-1} l_{41} l_{132}^{-1} l_{32} l_{32}^{-1} \\ \rightarrow l_{31}^{-1} l_{31} l_{131}^{-1} l_{23} l_{15}^{-1} = 1 \\ l_{11} l_{21}^{-1} = 1, l_{21} l_{133}^{-1} l_{132}^{-1} l_{131}^{-1} = 1 \\ l_{11} l_{12} l_{131} l_{132} l_{133} l_{14} l_{15} = 1 \\ l_{21} l_{22} l_{23} = 1, l_{31} l_{32} = 1, l_{41} l_{42} = 1 \\ l_{131} = 1, l_{132} = 1, l_{133} = 1, l_{31} = 1, l_{41} = 1 \end{array} \rangle$$

系3 すべての X_{i1}, \dots, X_{it_i} ($i=1, \dots, g$) が $U_{i-1} \cap (\partial X_{i1} \cup \dots \cup \partial X_{it_i}) \subset U_{i-1} \cap (m_{j1} \cup \dots \cup m_{jg})$ となるように取れるときには, 1-cell l_{ij} を分割する必要はないから, a), b) の基本群の表示は次のようにもっと簡単になる.

a) $\pi_1(M^3) = \langle l_{ij}, X_{k\ell} \mid L_1 = 1, \dots, L_{n-1} = 1, r_1 = 1, \dots, r_p = 1, l_{i1} \dots l_{ik} = 1 \rangle$ ($i=1, \dots, n$)

b) $\pi_1(M^3) = \langle l_{ij} \mid L_1 = 1, \dots, L_n = 1, r_1 = 1, \dots, r_p = 1, l_{i1} \dots l_{ik} = 1 \rangle$

$$(i=1, \dots, n, 0 \leq h < n-1)$$

練習問題 図3 に補助線をひいて $S^2 \times S^1$ の基本群の表示を計算して \mathbb{Z} になることを確認せよ.

Heegaard splitting $(U, V; F)$ の Heegaard diagrams $(U; l_1, \dots, l_n), (V; m_1, \dots, m_n)$ の meridian 系, longitude 系から知られている基本群の表示の方法は次のようにして求められる。

meridian 系, longitude 系は向き付けられているとする。 $(U; l_1, \dots, l_n)$ において, l_i 上のある点から l_i の向きに従って出発して m_j と交差するとき, l_i が m_j を上から下に横切るときは, m_j と読み, 逆に l_i が m_j を下から上に横切るときは m_j^{-1} と読んで行って出発点まで戻ったとき, これらの順序の読みの語を \hat{l}_i と表すと, $\pi_1(M^3)$ は m_1, \dots, m_n を生成元, $\hat{l}_1=1, \dots, \hat{l}_n=1$ を関係式として

$$\pi_1(M^3) = \langle m_1, \dots, m_n \mid \hat{l}_1=1, \dots, \hat{l}_n=1 \rangle$$

と表示される。逆に $(V; \partial D_1, \dots, \partial D_n) = (V; m_1, \dots, m_n)$ から V の meridian 系 $\{l_1, \dots, l_n\}$ を longitude 系 $\{m_1, \dots, m_n\}$ の走り方から読んで行って次の基本群の表示が得られる。

$$\pi_1(M^3) = \langle l_1, \dots, l_n \mid \hat{m}_1=1, \dots, \hat{m}_n=1 \rangle$$

定義 1 3 $\pi_1(M^3) = \langle m_1, \dots, m_n \mid \hat{l}_1=1, \dots, \hat{l}_n=1 \rangle \dots (1)$

$$\pi_1(M^3) = \langle l_1, \dots, l_n \mid \hat{m}_1=1, \dots, \hat{m}_n=1 \rangle \dots (2)$$

を meridian, longitude 系による基本群の表示 と呼ぶ。

定義 1 4 $(U; l_1, \dots, l_n)$ の細分を $H_U(D_1, \dots, D_n)$ とする。以下の (3), (3') を $H_U(D_1, \dots, D_n)$ による基本群の表示 と呼ぶ。

$H_U(D_1, \dots, D_n)$ が連結(従って $(U; l_1, \dots, l_n)$ も連結)

$$\pi_1(M^3) = \langle l_{i,j} \mid L_1=1, \dots, L_{n-1}=1, r_1=1, \dots, r_p=1, l_{i_1} \dots l_{i_k}=1 \rangle (i=1, \dots, n) \dots (3)$$

$H_U(D_1, \dots, D_n)$ が非連結 かつ $(U; l_1, \dots, l_n)$ が連結または非連結

$$\pi_1(M^3) =$$

$$\langle l_{i,j} \quad \left| \begin{array}{l} L_1=1, \dots, L_h=1, r_1=1, \dots, r_p=1, l_{i_1} \dots l_{i_k}=1 \\ l_{uvr} \quad (L_u=l_{uv}=l_{uv1} \dots l_{uvsu} \rightarrow) l_{uv1}=1, \dots, l_{uvsu}=1 \\ X_{i,j}(h=n-1) \quad (l_{uv}=l_{uv1} \dots l_{uvsu} (l_{uv} \neq l_k) \rightarrow) l_{uv1}'=1, \dots, l_{uvsu}'=1 \end{array} \right. \rangle \dots (3')$$

(i=1, \dots, n-\alpha, u=1, \dots, \alpha, 0 \leq h \leq n-1, n \geq 1)

$(V; m_1, \dots, m_n)$ の細分を $H_U(D_1', \dots, D_n')$ とする。 $H_U(D_1', \dots, D_n')$ による基本群の表示 が同様にして定義される。

$H_U(D_1', \dots, D_n')$ が連結(従って $(V; m_1, \dots, m_n)$ も連結)

$$\pi_1(M^3) = \langle m_{j_i} \mid M_1=1, \dots, M_{n-1}=1, r_1=1, \dots, r_p=1, m_{j_1} \dots m_{j_q}=1 \rangle \quad (j=1, \dots, n) \dots (4)$$

$H_U(D_1', \dots, D_n')$ が非連結 かつ $(V; m_1, \dots, m_n)$ が連結または非連結

$$\pi_1(M^3) =$$

$$\langle m_{j_i} \quad \left| \begin{array}{l} M_1=1, \dots, M_n=1, r_1=1, \dots, r_p=1, m_{j_1} \dots m_{j_q}=1 \\ (M_x = m_{x,y} = m_{x,y_1} \dots m_{x,y_t,x} \rightarrow) m_{x,y_1}=1, \dots, m_{x,y_t,x}=1 \\ (m_{x,y} = m_{x,y_1} \dots m_{x,y_t,x} (m_{x,y} \neq M_k) \rightarrow) m_{x,y_1}'=1, \dots, m_{x,y_t,x}'=1 \end{array} \right. \rangle \dots (4')$$

(j=1, \dots, n-\beta, x=1, \dots, \beta, 0 \leq h \leq n-1, n \geq 1)

(1), (2) は Heegaard diagram が非連結のときでもそのまま求められるが, (3'), (4') は $H_U(D_1, \dots, D_n), H_U(D_1', \dots, D_n')$ から 2-cells を構成しなければならない。

§ 3. Proofs of theorem A and B

定理 A, B の証明には [1] に述べられている polyhedral representation (= polygram) から得られる M^3 の基本群の表示方法を (非連結な) polygram

$$(H_U(D_1, \dots, D_n) \cup H_U(D_1', \dots, D_n'), f),$$

$$((H_U'(D_1, \dots, D_n) \cup (U_{i=1}^q(X_{i_1} \cup \dots \cup X_{i_t})))) +$$

$$(H_U'(D_1', \dots, D_n') \cup (U_{i=1}^q(X_{i_1} \cup \dots \cup X_{i_t}))), f) \text{ に適用してなされる。}$$

補題 1 M^3 は, 3-ball B^3 の境界の S^2 上の polygram $\Lambda = (G, f)$ から, equivalent points の同一視 f により得られるとする。このとき $f|S^2$ により, S^2 は surface complex (= fake surface) F^2 となり, $\pi_1(M^3, 0) \approx \pi_1(F^2, 0)$ となる。そして $\pi_1(F^2, 0)$ は以下のようにして決定される: 点 0 は loops の基点として取られている。各 1-cell に対応する loop は $\pi_1(F^2, 0)$ の生成元となる。関係式は貼り合わせの面の境界をまわることにより得られる [1]。

補題 2 $(U; D_1', \dots, D_n') = (U; l_1, \dots, l_n)$ を M^3 の Heegaard splitting $(U, V; F)$ の genus n ($n \geq 2$) Heegaard diagram とする。その連結な細分を $H_U(D_1, \dots, D_n)$ とする。 $H_U(D_1, \dots, D_n)$ は定義 5 の表示とする。その W -graph を $W_G(P_1, \dots, P_n)$ とする。すると基本群 $\pi_1(M^3, 0)$ は $W_G(P_1, \dots, P_n)$ の 1-cells $l_{i,j}$ から読み取って表示される。すなわち $H_U(D_1, \dots, D_n)$ から読み取って表示される。

proof $(H_U(D_1, \dots, D_n) \cup H_U(D_1', \dots, D_n'), f)$ により, 3-ball B_U^3 の境界の 2-球面 S_U^2 の $H_U(D_1, \dots, D_n)$ と 3-ball B_U^3 の境界の 2-球面 S_U^2 の $H_U(D_1', \dots, D_n')$ を identification map f により, 同じ label の 0-, 1-, 2-cells を同一視して M^3 が構成される. このとき $f|_{(S_U^2 \cup S_U^2)}$ により, $S_U^2 \cup S_U^2$ は fake surface F^2 になる. F^2 中の disk D_1 の中心点 P_1 を基点 O として選ぶ. van Kampen の定理により, $\pi_1(M^3, O) \approx \pi_1(F^2, O)$ となる. F^2 には U の meridian disks

$\{D_1, \dots, D_n\}$, V の meridian disks $\{D_1', \dots, D_n'\}$ および

$S_U^2 - |H_U(D_1, \dots, D_n)| - \cup_{j=1}^n (\text{Int } D_j^+ \cup \text{Int } D_j^-)$ の connected components の closure の 2-cells $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ がある. F^2 を各 meridian disk D_j が, D_j の中心点 P_j に contract するように変形する. この変形された曲面を F^2' とする. この変形に従い F^2 の他の各 2-cell σ_i , D_i' は変形されるが, 変形された σ_i を $\tau_i (i=1, \dots, p)$, 変形された D_i' を $\rho_i (i=1, \dots, n)$ で表すと,

$F^2' = (\tau_1 \cup \dots \cup \tau_p) \cup (\rho_1 \cup \dots \cup \rho_n)$ となり, $\pi_1(F^2, O) \approx \pi_1(F^2', O)$ となる.

各 $\partial \tau_i, \partial \rho_i$ は 1-cells $l_{i,j}$ からなり, $\cup_{j=1}^n (l_{i,1} \cup \dots \cup l_{i,k})$ は連結な

W-graph $WG_U(P_1, \dots, P_n)$ となる. $\pi_1(F^2', O)$ の表示は補題1と同じくなされる.

即ち, 各 1-cell $l_{i,j}$ に対応する loop は $\pi_1(F^2', O)$ の生成元となる. 関係式は境界 $\partial \tau_i, \partial \rho_i$ を回ることにより得られる. W-graph $WG_U(P_1, \dots, P_n)$ からは $l_{i,j}$ および $\partial \tau_i$ は読み取れる. $\partial \rho_i$ は $WG_U(P_1, \dots, P_n)$ からは読み取れないが, $\partial \rho_i = l_{i,1} \cup l_{i,2} \cup \dots \cup l_{i,k} (i=1, \dots, n)$ となるのであるから, これから得られる関係式を付け加えればよい.

Q.E.D.

Proof of theorem A

step 1 $\pi_1(F^2', O)$ の生成元の構成

$WG_U(P_1, \dots, P_n)$ は連結であり, $\{L_1, \dots, L_{n-1}\}$ は n 個の points $\{P_1, \dots, P_n\}$ を結んでいる. 各 1-cell $l_{i,j}$ に対応する loop を以下のようにして選ぶ.

$l_{i,j}$ は向き付られた 1-cell であるから, $\partial l_{i,j} = \{P_{i,j}, P_{i,j+1}\}$ として, 始点を $P_{i,j}$, 終点を $P_{i,j+1}$ とする. 基点 O から始点 $P_{i,j}$ へ至る path を

$o(L_{i,j_1} L_{i,j_2} \dots L_{i,j_k})_{P_{i,j}} (k \geq 0)$ で表す. すると 1-cell $l_{i,j}$ に対応する loop は

$$o(L_{i,j_1} L_{i,j_2} \dots L_{i,j_k})_{P_{i,j}} (l_{i,j}) (o(L_{i,j+1,1} L_{i,j+1,2} \dots L_{i,j+1,q})_{P_{i,j+1}})^{-1} (k \geq 0, q \geq 0)$$

となる. この loop の homotopy class

$$[o(L_{i,j_1} L_{i,j_2} \dots L_{i,j_k})_{P_{i,j}} (l_{i,j}) (o(L_{i,j+1,1} L_{i,j+1,2} \dots L_{i,j+1,q})_{P_{i,j+1}})^{-1}]$$

を $l_{i,j}$ で表す. 従って $\pi_1(F^2', O)$ の生成元は $\{l_{i,j}\} (i=1, \dots, n)$ となる.

特に $l_{i,j}=L_k$ or L_k^{-1} のときには、1-cell $l_{i,j}$ に対応する loop はそれぞれ

$$(L_1 \cdots L_{k-1})(L_k)(L_1 \cdots L_{k-1}L_k)^{-1}, (L_1 \cdots L_{k-1}L_k)(L_k^{-1})(L_1 \cdots L_{k-1})^{-1}$$

となるが、これらはいずれも homotopic 1 なので、これらの homotopy class は

$$\text{それぞれ } L_k = [(L_1 \cdots L_{k-1})(L_k)(L_1 \cdots L_{k-1}L_k)^{-1}] = [1] = 1$$

$$L_k^{-1} = [(L_1 \cdots L_{k-1}L_k)(L_k^{-1})(L_1 \cdots L_{k-1})^{-1}] = [1] = 1$$

となり、 $\pi_1(F^{2'}, 0)$ の単位元 1 となる。

step 2 関係式

$F^{2'}$ の一つの面 τ_i の境界 $\partial \tau_i$ 上の 1-cell を任意に選んで A_{i1} とし、この A_{i1} から出発して正の向き（または負の向き）に $\partial \tau_i$ 上の 1-cells を続けて読んだものを $A_{i1} \cup A_{i2} \cup \cdots \cup A_{ik} \cup A_{i,k+1} \cdots \cup A_{in}$ ($n \geq 2$)

$$(\partial A_{ik} \cap \partial A_{i,k+1} = Q_{i,k+1}, \partial A_{in} \cap \partial A_{i1} = Q_{i1})$$

とする。ここで各 A_{ik} は 1-cells $\{l_{i,j}, l_{i,j}^{-1}\}$ ($i=1, \dots, n$) の一つである。

基点 0 から点 Q_{i1} へ至り $A_{i1}A_{i2} \cdots A_{ik}A_{i,k+1} \cdots A_{in}$ を回って基点 0 へもどる loop は一般に

$${}_0(L_{i11}L_{i12} \cdots L_{i1s})_{Q_{i1}}(A_{i1}A_{i2} \cdots A_{ik}A_{i,k+1} \cdots A_{in})({}_0(L_{i11}L_{i12} \cdots L_{i1s})_{Q_{i1}})^{-1} (s \geq 0)$$

と表される。ここで $s=0$ のとき $Q_{i1}=0$ である。

この loop の homotopy class の表示は次のように変形される。

$$\begin{aligned} & [{}_0(L_{i11} \cdots L_{i1s})_{Q_{i1}}(A_{i1}A_{i2} \cdots A_{ik}A_{i,k+1} \cdots A_{in})({}_0(L_{i11} \cdots L_{i1s})_{Q_{i1}})^{-1}] \\ = & [{}_0(L_{i11} \cdots L_{i1s})_{Q_{i1}}(A_{i1}) \cdot ({}_0(L_{i21} \cdots L_{i2t})_{Q_{i2}})^{-1}{}_0(L_{i21} \cdots L_{i2t})_{Q_{i2}} \cdot (A_{i2}) \cdot \\ & ({}_0(L_{i31} \cdots L_{i3u})_{Q_{i3}})^{-1}{}_0(L_{i31} \cdots L_{i3u})_{Q_{i3}} \cdot \cdots \cdot ({}_0(L_{ik1} \cdots L_{ikv})_{Q_{ik}})^{-1} \\ & {}_0(L_{ik1} \cdots L_{ikv})_{Q_{ik}} \cdot (A_{ik}) \cdot ({}_0(L_{i,k+11} \cdots L_{i,k+1w})_{Q_{i,k+1}})^{-1}{}_0(L_{i,k+11} \cdots L_{i,k+1w})_{Q_{i,k+1}} \cdot \\ & \cdots \cdot ({}_0(L_{in1} \cdots L_{inx})_{Q_{in}})^{-1}{}_0(L_{in1} \cdots L_{inx})_{Q_{in}} \cdot (A_{in})({}_0(L_{i11} \cdots L_{i1s})_{Q_{i1}})^{-1}] \\ = & [{}_0(L_{i11} \cdots L_{i1s})_{Q_{i1}}(A_{i1})({}_0(L_{i21} \cdots L_{i2t})_{Q_{i2}})^{-1}] [{}_0(L_{i21} \cdots L_{i2t})_{Q_{i2}} \cdot (A_{i2}) \cdot \\ & ({}_0(L_{i31} \cdots L_{i3u})_{Q_{i3}})^{-1}] \cdot \cdots \cdot \\ & [{}_0(L_{ik1} \cdots L_{ikv})_{Q_{ik}} \cdot (A_{ik}) \cdot ({}_0(L_{i,k+11} \cdots L_{i,k+1w})_{Q_{i,k+1}})^{-1}] \cdot \cdots \cdot \\ & [{}_0(L_{in1} \cdots L_{inx})_{Q_{in}} \cdot (A_{in})({}_0(L_{i11} \cdots L_{i1s})_{Q_{i1}})^{-1}] \\ = & A_{i1}A_{i2} \cdots A_{ik}A_{i,k+1} \cdots A_{in} \end{aligned}$$

故に関係子は $A_{i1}A_{i2} \cdots A_{ik}A_{i,k+1} \cdots A_{in}$ となる。これは $\partial \tau_i$ を正(または負)の向きに回ったとき、 $\partial \tau_i$ にある $l_{i,j}$ の向きが正の向きと同じなら $l_{i,j}$ 、反対向きなら $l_{i,j}^{-1}$ と続けて読んだ word である。また $F^{2'}$ の面 ρ_i ($i=1, \dots, n$) の境界 $\partial \rho_i$ から読み取る関係子は $l_{i1}l_{i2} \cdots l_{ik}$ となる。

以上により、 $\pi_1(F^{2'}, 0) (\approx \pi_1(F^2, 0) \approx \pi_1(M^3, 0))$ は W-graph $WG_U(P_1, \dots, P_n)$ から 1-cell $l_{i,j}$ を読み取って表示される。このことは W-graph の代わりにもとの細分 $H_U(D_1, \dots, D_n)$ から $m_{i,j}$ を省略して読み取れるので、定理の基本群の表示を得る。 Q.E.D.

系2 は M^3 の連結な Heegaard diagram $(U; l_i)$ から得られる W-graph $WG_U(P_i)$ は一つの vertex P_i からなる連結 graph であるから、vertices を結ぶ path L_i を $l_{i,j}$ の中から選ぶ必要はない。従って系2 の $\pi_1(M^3)$ の表示は定理A において Heegaard genus = 1 の特別な場合である。

Proof of theorem B

$H_U'(D_1, \dots, D_n)$ の対を $H_U'(D_1', \dots, D_n')$ とする。

$H_U'(D_1, \dots, D_n)$ の W-graph を $WG_U'(P_1, \dots, P_n)$ とする。

$$((H_U'(D_1, \dots, D_n) \cup (U_{i=1}^n (X_{i,1} \cup \dots \cup X_{i,t_i}))) + (H_U'(D_1', \dots, D_n') \cup (U_{i=1}^n (X_{i,1} \cup \dots \cup X_{i,t_i}))), f)$$

は連結性を除いて polygram の条件を満たす。従ってこの f より得られる fake surface を F^2 とすると、 $\pi_1(M^3, 0) \approx \pi_1(F^2, 0)$ となる。

F^2 から補題2 の証明と同様な曲面 $F^{2'}$ を作ると、 $\pi_1(F^2, 0) \approx \pi_1(F^{2'}, 0)$ となる。

$WG_U(P_1, \dots, P_n)$ は非連結であるが、 $WG_U'(P_1, \dots, P_n) \cup (U_{i=1}^n (X_{i,1} \cup \dots \cup X_{i,t_i}))$ は連結となる。従って補題2 と同様にして、 $\pi_1(F^{2'}, 0)$ は

$WG_U'(P_1, \dots, P_n) \cup (U_{i=1}^n (X_{i,1} \cup \dots \cup X_{i,t_i}))$ の 1-cells から読み取って表示される。

a) $(U; l_1, \dots, l_n)$ が連結なとき

定理A の証明と同様にして証明される。

b) $(U; l_1, \dots, l_n)$ が非連結なとき

定理A の証明と同様にして証明されるが、 $X_{i,1}, \dots, X_{i,t_i}$ は points

(P_1, \dots, P_n) が連結となる paths の役目も果たすから関係式に $X_{i,1}=1, \dots, X_{i,t_i}=1$ が入るので、 $X_{i,j}$ の読みは省略してよい。従って定理 b) の表示となる。

Q.E.D.

§ 4. Examples

例 8 図 7 は H.Poincaré が構成した Poincaré空間の Heegaard diagrams $(U; l_1, l_2), (V; m_1, m_2)$ およびそれらの細分 $H_U(D_1, D_2), H_U(D_1', D_2')$ である。
 $(U; l_1, l_2)$ から得られる基本群は

$$\pi_1 = \langle m_1, m_2 \mid m_2^{-1} m_1^4 m_2^{-1} m_1^{-1} = 1, m_2^2 m_1^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} = 1 \rangle$$

となる。

また $H_U(D_1, D_2)$ から得られる基本群は, $L_1 = l_{14} = 1$ を選ぶと

$$\pi_1 = \langle l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{15}, l_{16}, l_{17} \mid \begin{array}{l} l_{14} = 1, l_{12} = l_{13}, l_{11} = l_{12}, l_{24} = l_{16} \\ l_{21} = l_{17}^{-1}, l_{25} = l_{15}, l_{23} = l_{14}^{-1} \\ l_{21} l_{22}^{-1} l_{16}^{-1} = 1, l_{25} l_{11} l_{17}^{-1} = 1 \\ l_{22} l_{15} l_{23}^{-1} = 1, l_{13} l_{24} l_{14}^{-1} = 1 \\ l_{11} l_{12} l_{13} l_{14} l_{15} l_{16} l_{17} = 1 \\ l_{21} l_{22} l_{23} l_{24} l_{25} = 1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{15}, l_{16}, l_{17} \mid \begin{array}{l} l_{11} = l_{12} = l_{13}, l_{24} = l_{16}, l_{21} = l_{17}^{-1}, l_{25} = l_{15}, l_{23} = 1 \\ l_{21} l_{22}^{-1} l_{16}^{-1} = 1, l_{25} l_{11} l_{17}^{-1} = 1, l_{22} l_{15} l_{23}^{-1} = 1 \\ l_{13} l_{24} = 1, l_{11} l_{12} l_{13} l_{15} l_{16} l_{17} = 1 \\ l_{21} l_{22} l_{23} l_{24} l_{25} = 1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{11}, l_{15}, l_{16}, l_{17} \mid \begin{array}{l} l_{17}^{-1} l_{22}^{-1} l_{16}^{-1} = 1, l_{15} l_{11} l_{17}^{-1} = 1, l_{22} l_{15} = 1, l_{11} l_{16} = 1 \\ l_{11} l_{11} l_{11} l_{15} l_{16} l_{17} = 1, l_{17}^{-1} l_{22} l_{16} l_{15} = 1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{11}, l_{15}, l_{16}, l_{17} \mid \begin{array}{l} l_{17}^{-1} l_{16} l_{11} = 1, l_{15} l_{11} l_{17}^{-1} = 1 \\ l_{11} l_{11} l_{11} l_{15} l_{11}^{-1} l_{17} = 1, l_{17}^{-1} l_{15}^{-1} l_{11}^{-1} l_{16} = 1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{11}, l_{15} \mid l_{11} l_{11} l_{11} l_{15} l_{11}^{-1} l_{15} l_{11} = 1, l_{11}^{-1} l_{15}^{-1} l_{15}^{-1} l_{11}^{-1} l_{15} = 1 \rangle$$

$$= \langle l_{11}, l_{15} \mid l_{11}^4 l_{15} l_{11}^{-1} l_{15} = 1, l_{11}^{-1} l_{15}^{-2} l_{11}^{-1} l_{15} = 1 \rangle$$

となり, Heegaard diagram $(U; l_1, l_2)$ から得られた計算結果と一致する。

例9 図8は 2-brigide knot から Dehn construction で作られる homology 3-sphere(=正十二面体空間)の Heegaard diagrams およびその細分の対である。
 $(U; l_1, l_2)$ から得られる基本群は次のようになる。

$$\pi_1 = \langle m_1, m_2 \mid m_1 m_2 m_1^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_2 m_1 = 1, m_1 m_2 m_1^{-1} m_2 m_1 m_2^{-1} = 1 \rangle$$

$H_U(D_1, D_2)$ から得られる基本群は, $L_1 = l_{11} = 1$ を選ぶと

$$\pi_1 = \langle l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{15}, l_{16}, l_{17} \mid \begin{array}{l} l_{11} = 1, l_{15} = l_{23}, l_{15} = l_{26}^{-1}, l_{11} = l_{21} \\ l_{14} = l_{21}^{-1}, l_{12} = l_{22}, l_{12} = l_{25}^{-1}, l_{16} = l_{24} \\ l_{13} = l_{24}^{-1}, l_{11} l_{26} l_{17}^{-1} = 1, l_{25} l_{16} l_{17}^{-1} = 1 \\ l_{23} l_{14} l_{22}^{-1} l_{13}^{-1} = 1 \\ l_{11} l_{12} l_{13} l_{14} l_{15} l_{16} l_{17} = 1 \\ l_{21} l_{22} l_{23} l_{24} l_{25} l_{26} = 1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{12}, l_{13}, l_{15}, l_{16}, l_{17} \mid \begin{array}{l} l_{15} = l_{23}, l_{15} = l_{26}^{-1}, l_{12} = l_{22}, l_{12} = l_{25}^{-1}, l_{16} = l_{24} \\ l_{13} = l_{24}^{-1}, l_{26} l_{17}^{-1} = 1, l_{25} l_{16} l_{17}^{-1} = 1 \\ l_{23} l_{22}^{-1} l_{13}^{-1} = 1, l_{12} l_{13} l_{15} l_{16} l_{17} = 1 \\ l_{22} l_{23} l_{24} l_{25} l_{26} = 1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{12}, l_{13}, l_{15}, l_{16} \mid \begin{array}{l} l_{12} = l_{22}, l_{12} = l_{25}^{-1}, l_{16} = l_{24}, l_{13} = l_{24}^{-1}, l_{25} l_{16} l_{15} = 1 \\ l_{15} l_{22}^{-1} l_{13}^{-1} = 1, l_{12} l_{13} l_{15} l_{16} l_{15}^{-1} = 1 \\ l_{22} l_{23} l_{24} l_{25} l_{15}^{-1} = 1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{12}, l_{13}, l_{15}, l_{16} \mid \begin{array}{l} l_{16} = l_{24}, l_{13} = l_{24}^{-1}, l_{12}^{-1} l_{16} l_{15} = 1, l_{15} l_{12}^{-1} l_{13}^{-1} = 1 \\ l_{12} l_{13} l_{15} l_{16} l_{15}^{-1} = 1, l_{12} l_{23} l_{24} l_{12}^{-1} l_{15}^{-1} = 1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{12}, l_{15}, l_{24} \mid \begin{array}{l} l_{12}^{-1} l_{24} l_{15} = 1, l_{15} l_{12}^{-1} l_{24} = 1, l_{12} l_{24}^{-1} l_{15} l_{24} l_{15}^{-1} = 1 \\ l_{12} l_{15} l_{24} l_{12}^{-1} l_{15}^{-1} = 1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{12}, l_{15}, l_2 \mid \begin{array}{l} l_{12}^{-1} l_2 l_{15} = 1, l_{12} l_2^{-1} l_{15} l_2 l_{15}^{-1} = 1 \\ l_{12} l_{15} l_2 l_{12}^{-1} l_{15}^{-1} = 1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{15}, l_2 \mid l_2 l_{15} l_2^{-1} l_{15} l_2 l_{15}^{-1} = 1, l_2 l_{15} l_{15} l_2 l_{15}^{-1} l_2^{-1} l_{15}^{-1} = 1 \rangle$$

これは $(U; l_1, l_2)$ から得られる基本群の表示と一致する。

また $l_1=l_{23}=1$ を選ぶと

$$\pi_1 = \langle l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{15}, l_{16}, l_{17} \mid \begin{array}{l} l_{23}=1, l_{15}=l_{23}, l_{15}=l_{26}^{-1}, l_{11}=l_{21} \\ l_{14}=l_{21}^{-1}, l_{12}=l_{22}, l_{12}=l_{25}^{-1}, l_{16}=l_{24} \\ l_{13}=l_{24}^{-1}, l_{11}l_{26}l_{17}^{-1}=1 \\ l_{25}l_{16}l_{17}^{-1}=1, l_{23}l_{14}l_{22}^{-1}l_{13}^{-1}=1 \\ l_{11}l_{12}l_{13}l_{14}l_{15}l_{16}l_{17}=1 \\ l_{21}l_{22}l_{23}l_{24}l_{25}l_{26}=1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{16}, l_{17} \mid \begin{array}{l} l_{11}=l_{21}, l_{14}=l_{21}^{-1}, l_{12}=l_{22}, l_{12}=l_{25}^{-1}, l_{16}=l_{24} \\ l_{13}=l_{24}^{-1}, l_{11}=l_{17}, l_{25}l_{16}=l_{17}, l_{14}l_{22}^{-1}=l_{13} \\ l_{11}l_{12}l_{13}l_{14}l_{16}l_{17}=1, l_{21}l_{22}l_{24}l_{25}=1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{16} \mid \begin{array}{l} l_{12}=l_{22}, l_{12}=l_{25}^{-1}, l_{16}=l_{24}, l_{13}=l_{24}^{-1}, l_{25}l_{16}=l_{11} \\ l_{11}^{-1}l_{22}^{-1}=l_{13}, l_{11}l_{12}l_{13}l_{11}^{-1}l_{16}l_{11}=1, l_{11}l_{22}l_{24}l_{25}=1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{16} \mid \begin{array}{l} l_{16}=l_{24}, l_{13}^{-1}=l_{24}, l_{12}^{-1}l_{16}=l_{11}, l_{11}^{-1}l_{12}^{-1}=l_{13} \\ l_{11}l_{12}l_{13}l_{11}^{-1}l_{16}l_{11}=1, l_{11}l_{12}l_{24}l_{12}^{-1}=1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{11}, l_{12}, l_{24} \mid \begin{array}{l} l_{12}^{-1}l_{24}=l_{11}, l_{11}^{-1}l_{12}^{-1}=l_{24}^{-1}, l_{11}l_{12}l_{24}^{-1}l_{11}^{-1}l_{24}l_{11}=1 \\ l_{11}l_{12}l_{24}l_{12}^{-1}=1 \end{array} \rangle$$

$$= \langle l_{12}, l_{24} \mid l_{12}^{-1}l_{24}l_{12}l_{24}^{-1}l_{24}^{-1}l_{12}l_{24}l_{12}^{-1}l_{24}=1, l_{12}^{-1}l_{24}l_{12}l_{24}l_{12}^{-1}=1 \rangle$$

$$= \langle l_{12}, l_{24} \mid l_{12}l_{24}^{-1}l_{24}^{-1}l_{24}^{-1}l_{12}l_{24}l_{12}^{-1}l_{24}=1, l_{12}^{-1}l_{24}l_{12}=l_{12}l_{24}^{-1} \rangle$$

$$= \langle l_{12}, l_{24} \mid l_{12}^{-1}l_{24}l_{12}l_{24}^{-1}l_{24}^{-1}l_{24}^{-1}l_{12}l_{24}=1, l_{12}^{-1}l_{24}l_{12}=l_{12}l_{24}^{-1} \rangle$$

$$= \langle l_{12}, l_{24} \mid l_{12}l_{24}^{-4}l_{12}l_{24}=1, l_{12}^{-1}l_{24}l_{12}l_{24}l_{12}^{-1}=1 \rangle$$

$$= \langle l_{12}, l_{24} \mid l_{12}l_{24}^{-4}l_{12}l_{24}=1, l_{12}^{-2}l_{24}l_{12}l_{24}=1 \rangle$$

を得る。これは図7の H. Poincaré が構成した Poincaré空間の Heegaard diagram から得られる基本群になるのである。図7から図8への変換は[4]を見よ。

(52)

例 10 図9 は $L(7,2)\#L(7,4)$ の 非連結な genus 2 Heegaard diagram $(U;l_1,l_2)$ およびその非連結な細分 $H_U(D_1,D_2)$ である. 1-cell m_{15} と m_{27} の中点を結ぶ 1-cell X_1 (点線) をとると $H_U'(D_1,D_2) \cup X_1$ は連結となり, これより得られる基本群の表示は以下のようになる.

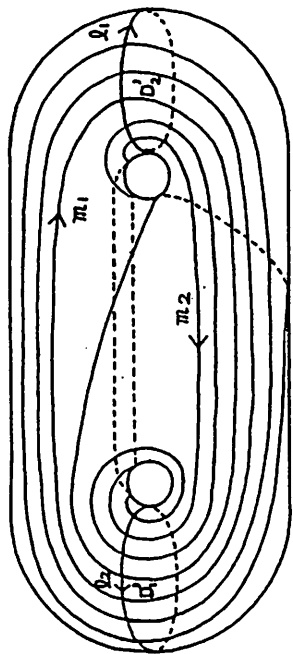
$$\pi_1(L(7,2)\#L(7,4))$$

$$= \langle l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{15}, l_{16}, l_{17} \mid \begin{array}{l} l_{13}l_{16}^{-1}=1, l_{16}l_{12}^{-1}=1, l_{12}l_{15}^{-1}=1 \\ l_{21}, l_{22}, l_{23}, l_{24}, l_{25}, l_{26}, l_{27} \mid \begin{array}{l} l_{15}l_{11}^{-1}=1, l_{11}l_{14}^{-1}=1, l_{14}l_{17}^{-1}=1 \\ l_{26}l_{24}^{-1}=1, l_{24}l_{22}^{-1}=1, l_{22}l_{27}^{-1}=1 \\ l_{27}l_{25}^{-1}=1, l_{25}l_{23}^{-1}=1, l_{23}l_{21}^{-1}=1 \\ l_{17}l_{13}^{-1}l_{21}l_{26}^{-1}=1 \\ l_{11}l_{12}l_{13}l_{14}l_{15}l_{16}l_{17}=1 \\ l_{21}l_{22}l_{23}l_{24}l_{25}l_{26}l_{27}=1 \end{array} \end{array} \rangle$$

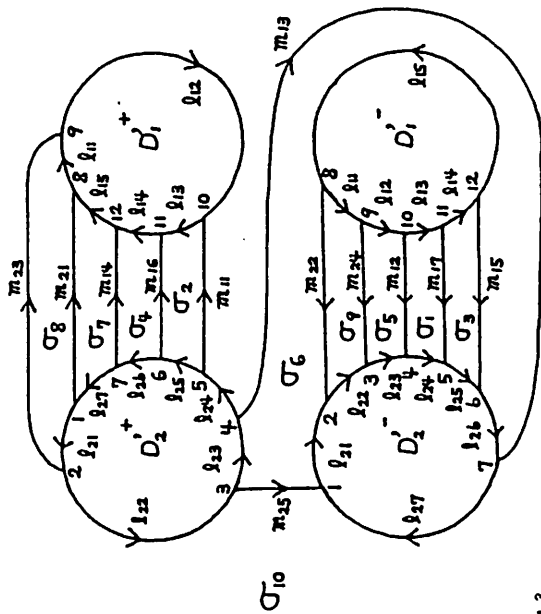
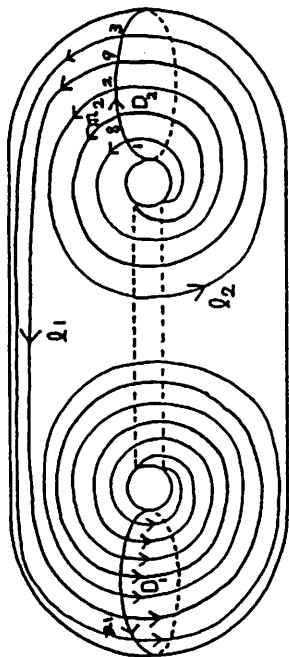
$$= \langle l_{11}, l_{21} \mid l_{11}^7=1, l_{21}^7=1 \rangle \approx \mathbb{Z}_7 * \mathbb{Z}_7$$

練習問題 $L(7,2)\#L(7,4)$ の $(U;l_1,l_2)$ の細分 $H_U(D_2,D_3)$ を作れ. この $H_U(D_2,D_3)$ から基本群の表示を求め, $\mathbb{Z}_7 * \mathbb{Z}_7$ になることを確認せよ.

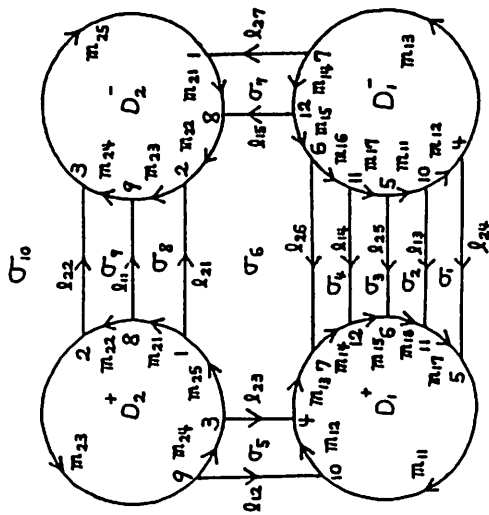
(V; m_1, m_2)



(U; l_1, l_2)



$H_u(D_1', D_2')$



$H_u(D_1, D_2)$

图 1 S^3

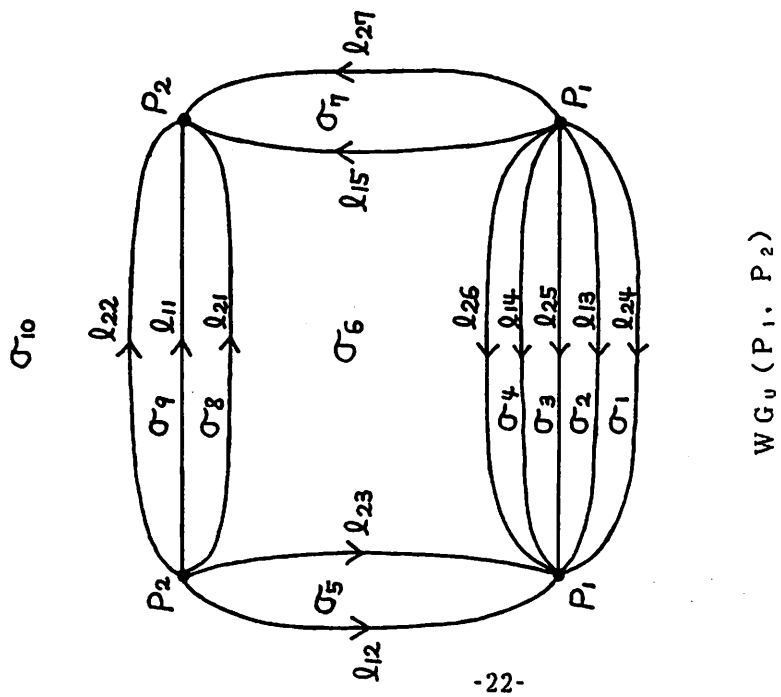
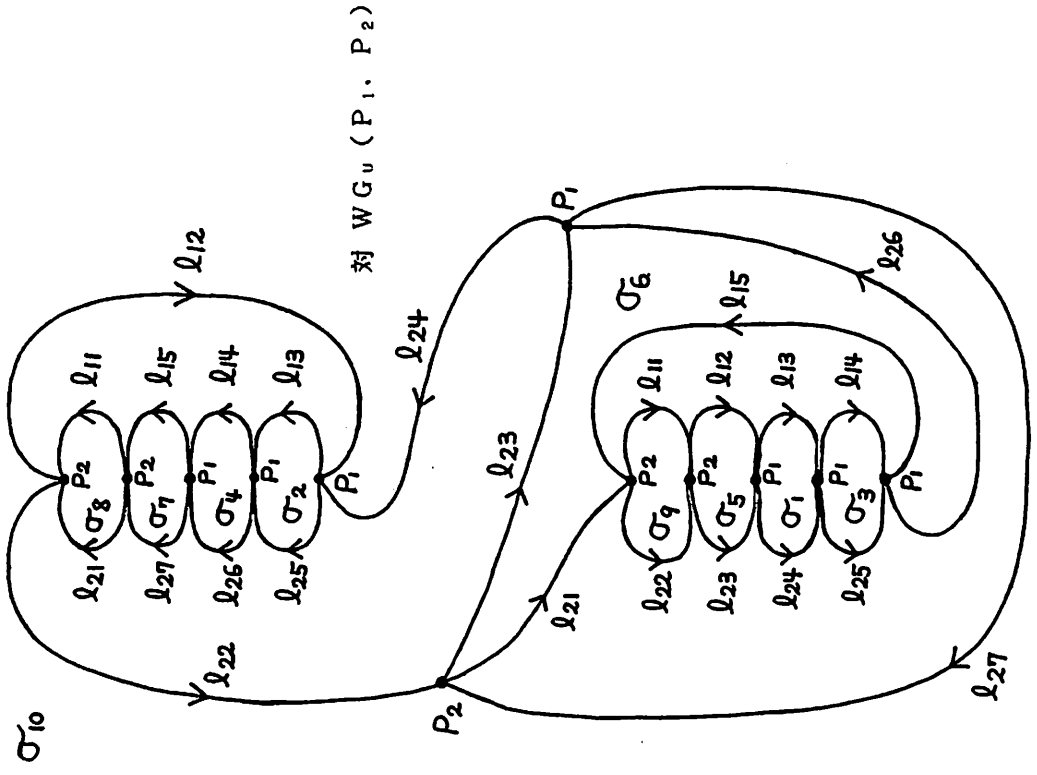


图 2

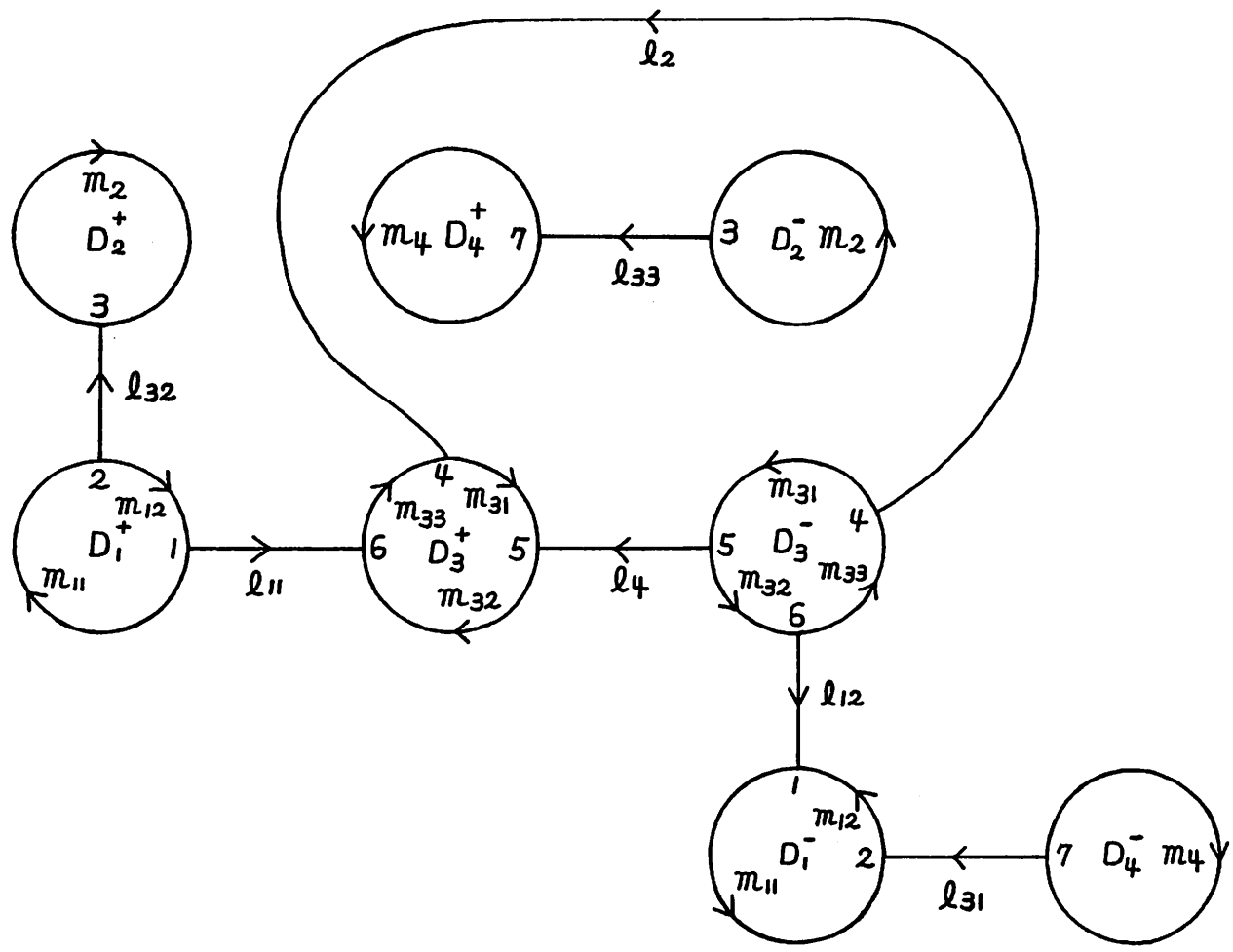
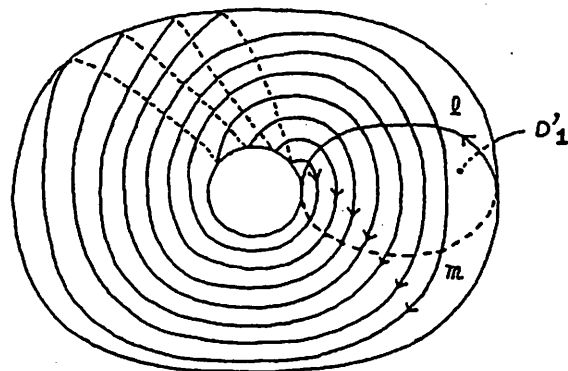
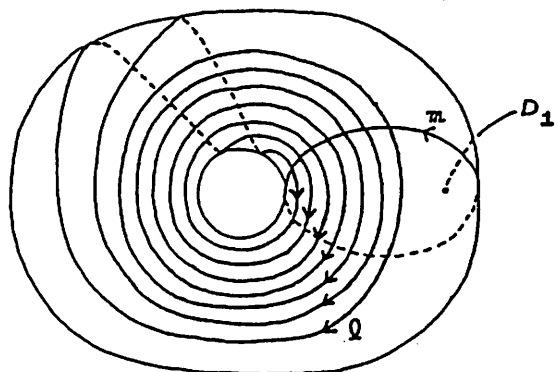


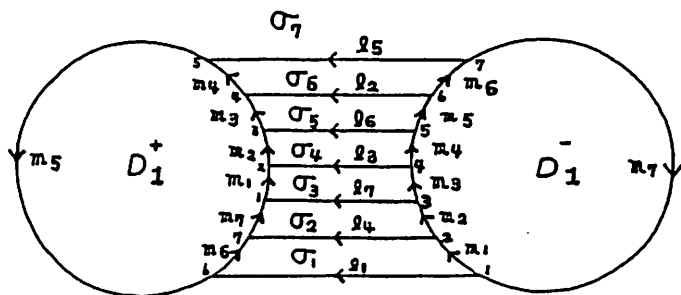
图 3 $S^2 \times S^1$

L (7, 2)
(U; 1_i)

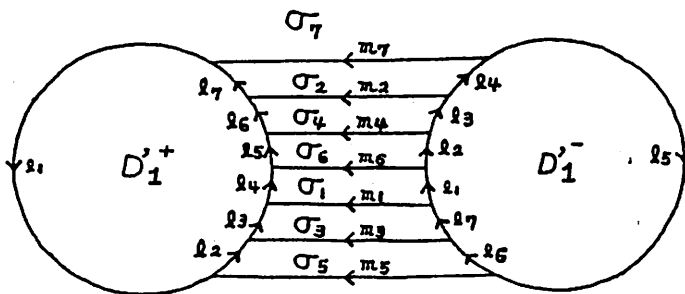
L (7, 4)
(V; m_i)



-24-



$H_u(D_i)$



$H_u(D_1')$

图 4

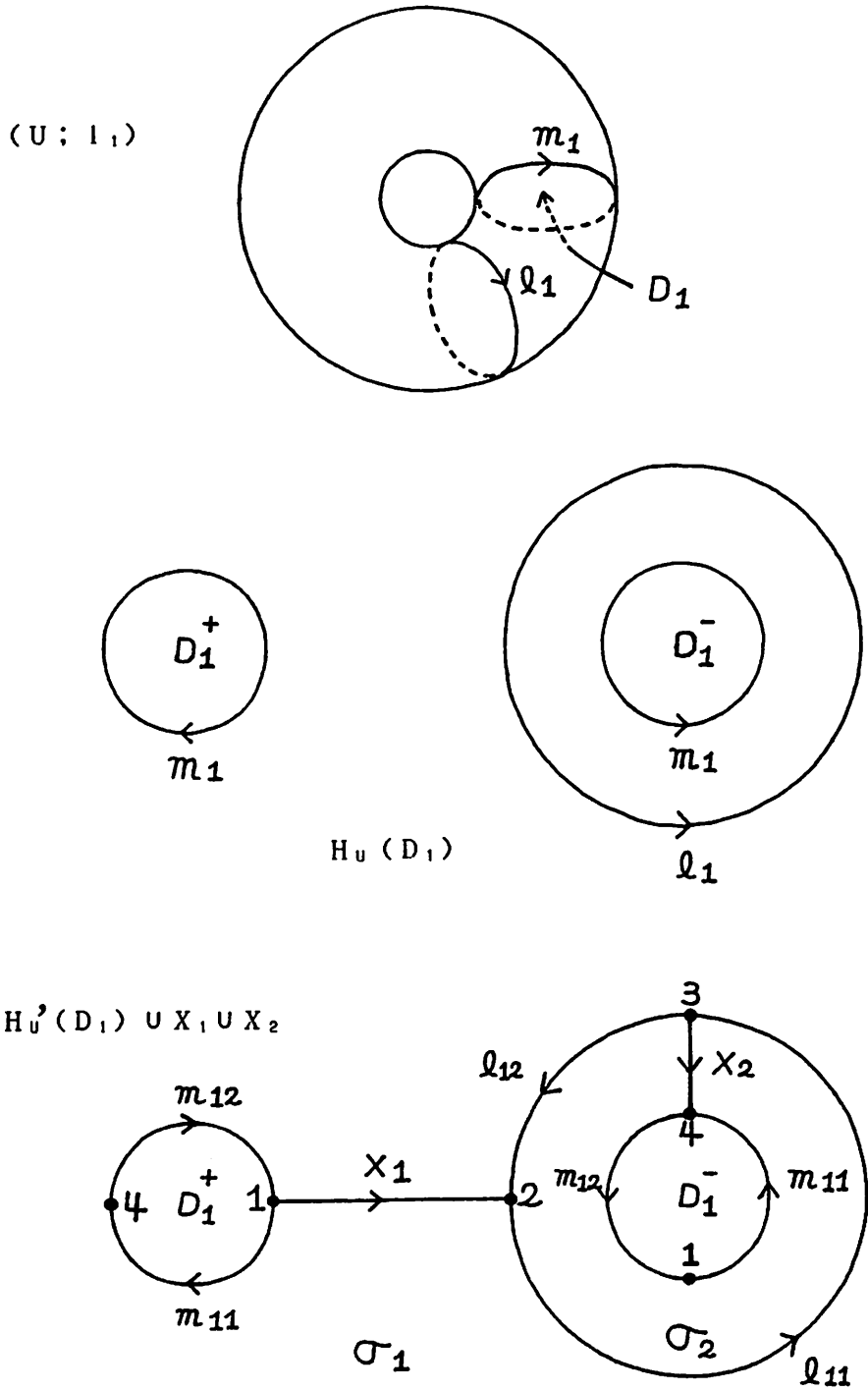


图 5 $S^2 \times S^1$

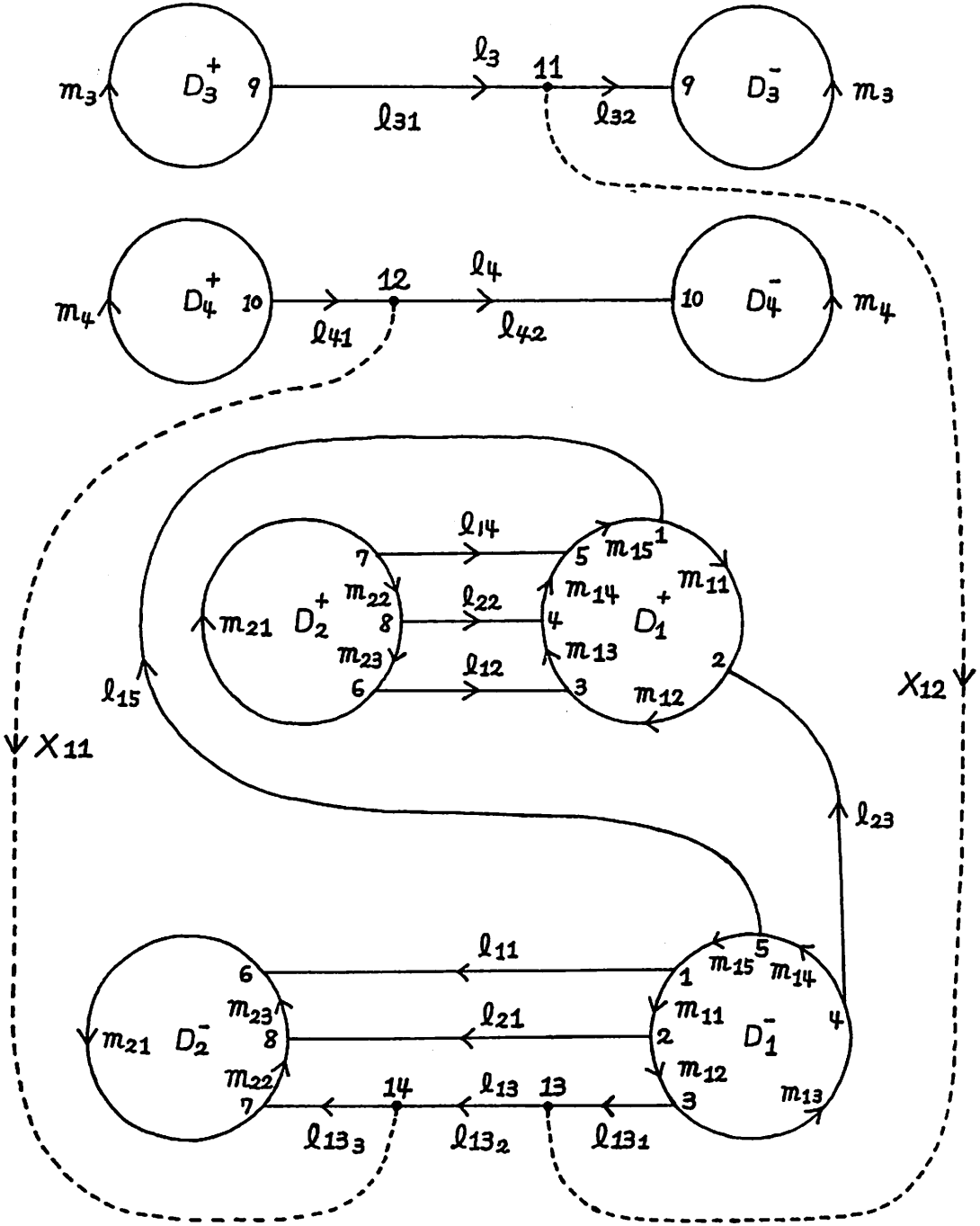
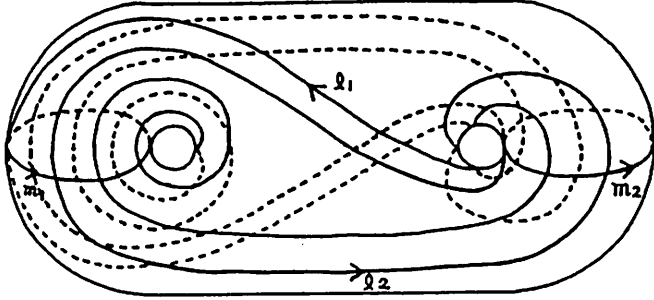
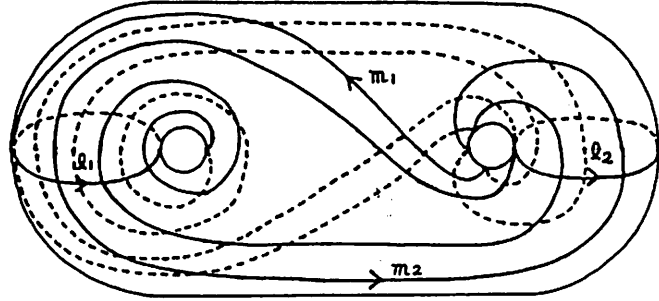


图6 S^3 の $(U; l_1, l_2, l_3, l_4)$

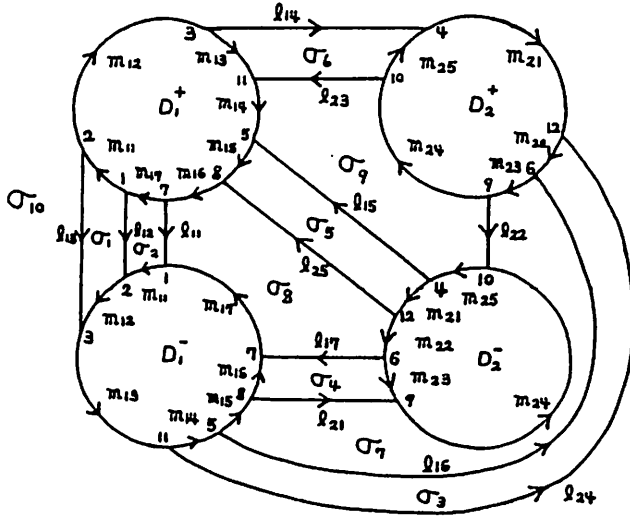
(U; l_1, l_2)



(V; m_1, m_2)

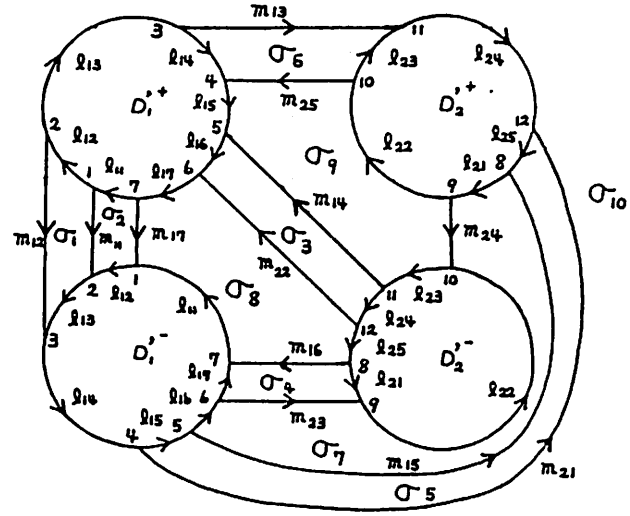


-27-



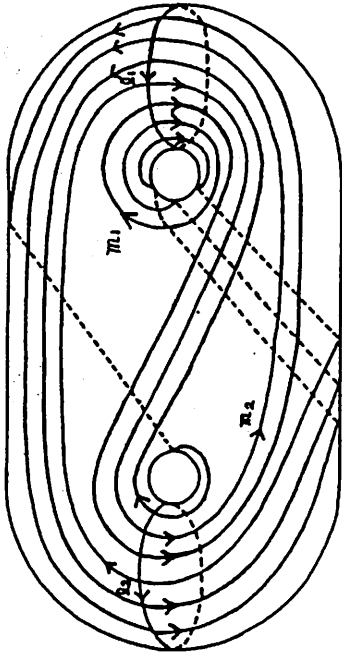
$H_U(D_1, D_2)$

图7 Poincaré空間

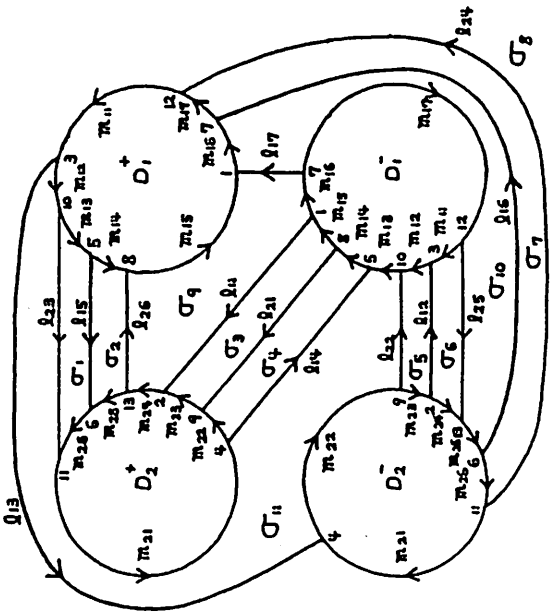
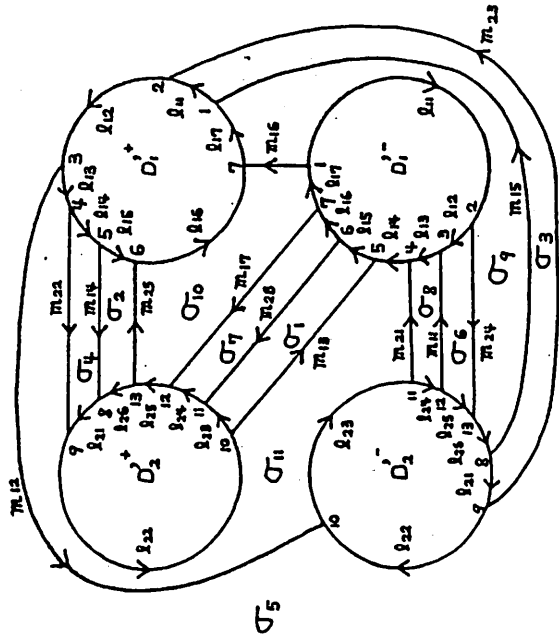
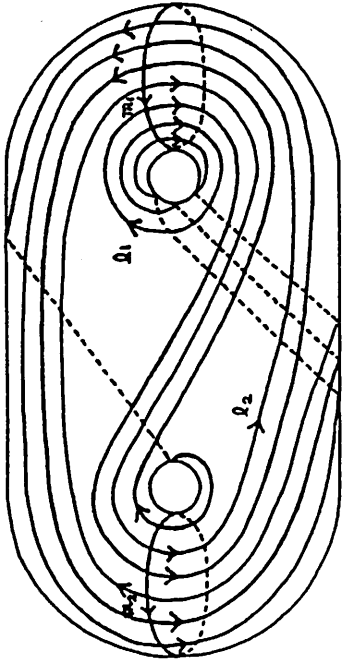


$H_U(D_1', D_2')$

(V; m₁, m₂)



(U; l₁, l₂)

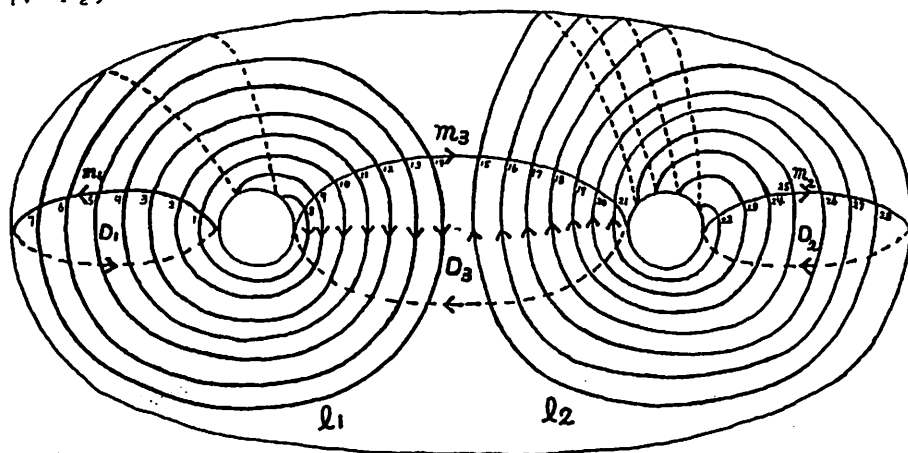


$H_u(D_1', D_2')$

圖 8 正十二面體空間

$H_u(D_1, D_2)$

$(U; l_1, l_2)$



$H_0(D_1, D_2)$

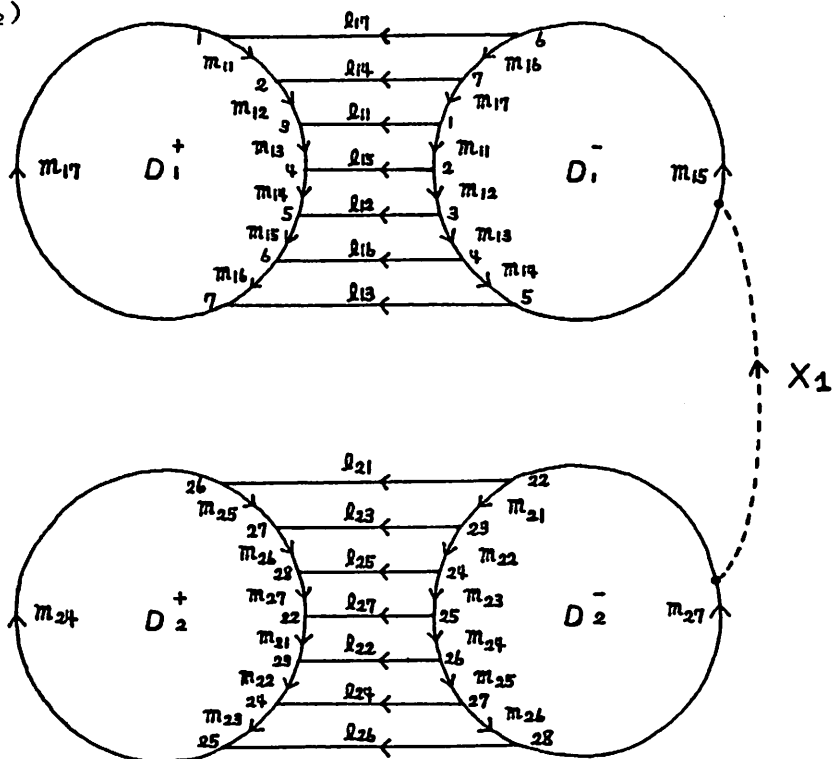


图9 $L(7, 2) \# L(7, 4)$

References

- [1] H. SEIFERT and W. THRELHALL : A TEXTBOOK OF TOPOLOGY ,Translated by M.A.Goldman, ACADEMIC PRESS, INC. 1980
- [2] 山下正勝 : DS-diagram と Heegaard diagram , 数理科学講究録 636 (1987), 91-107., 京都大学数理解析研究所
- [3] H. Ikeda & M. Yamashita & K. Yokoyama : Deformations of DS-diagrams , Topology and Computer Science(1987), 81-138., Kinokuniya Company, Ltd. Tokyo
- [4] 堀口俊二 : Heegaard diagrams の移り変わり, 箱根セミナー'90 (低次元 PL TOPOLOGY), 1990 , 63-109.
- [5] Hempel, J. : 3-manifolds , Ann. of Math. Studies 86 , Princeton Univ. Press(1976)
- [6] 本間龍雄 : ポアンカレ予想物語 13 , 日本評論社(1985)
- [7] _____ : 組合せ位相幾何学, 共立全書 231, 1980
- [8] _____ : Heegaard 分解と曲面上の曲線系について, 数理科学講究録 219(1974), 90-102., 京都大学数理解析研究所
- [9] 落合豊行 : genus 2 の Heegaard 分解をもつ homology 3-sphere , 数理科学講究録 268(1976) , 52-68., 京都大学数理解析研究所