

Heegaard diagrams の移り変わり

堀口 俊二 (日大・短大)

§ 1. Heegaard splitting, surface, diagram と Heegaard diagrams の移り変わり

§ 2. DS-diagram と DS-変形

§ 3. 主定理 (定理 1, 2, 3, 4, 5) の証明

§ 4. Examples (S^3 , 正 12 面体空間 π , レンズ空間 $L(7, 2), L(7, 4)$)

§ 1. Heegaard splitting, surface, diagram と Heegaard diagrams の移り変わり

Heegaard splitting, Heegaard surface, Heegaard diagram

定義 1 cube with n handles (= genus n handlebody) U において, 互いに disjoint な n 個の proper 2-disks A_1, A_2, \dots, A_n を選んで, $U - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ が連結なとき, 各 A_i を U の meridian disk, $\{A_1, A_2, \dots, A_n \mid \text{各 } A_i \text{ は } U \text{ の proper disk, } A_i \cap A_j = \emptyset\}$ を U の meridian disk 系, $\{\partial A_1, \partial A_2, \dots, \partial A_n\}$ を meridian 系 とよぶ. 図 1 (次ページ)

定義 2 連結閉 3-多様体 (orientable or nonorientable) M^3 は 2 つの cube with n handles U, V の和:

$$M^3 = U \cup V, \quad U \cap V = \partial U \cap \partial V = F: \text{genus } n \text{ の閉曲面}$$

と表わされる. $(U, V; F)$ を M^3 の genus n の Heegaard splitting といい, F を Heegaard surface と呼ぶ. 図 2 (次ページ)

さらに ∂U から ∂V の上への同相写像 $\eta: \partial U \rightarrow \partial V$ があって, $M^3 = U \cup V$ は U と V を η によってその境界で貼合わせて得られる空間とも考えられる. このとき 4 つの組 $(M^3; U, V, \eta)$ のことも Heegaard splitting とよぶ.

定義 3 $(M^3; U, V, \eta)$ を M^3 の genus n Heegaard splitting とする. U, V の meridian disk 系をそれぞれ

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\}, \quad \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$$

とする.

$$(U; \partial B_1, \partial B_2, \dots, \partial B_n) \text{ あるいは } (V; \partial A_1, \partial A_2, \dots, \partial A_n)$$

を Heegaard splitting $(M^3; U, V)$ の genus n Heegaard diagram とよぶ. 図 2

$(M^3; U, V, \eta)$ の η を具体的に指定するものが Heegaard diagram である.

定義 4 genus n Heegaard diagram $(U; \partial B_1, \partial B_2, \dots, \partial B_n)$ において,

$$\begin{aligned} & \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\} \cap \{\partial B_1 \cup \partial B_2 \cup \dots \cup \partial B_n\} \\ &= \{\partial A_1 \cup \partial A_2 \cup \dots \cup \partial A_n\} \cap \{\partial B_1 \cup \partial B_2 \cup \dots \cup \partial B_n\} \end{aligned}$$

は, points であるが, この points の数を Heegaard diagram の交点数 とよぶ.

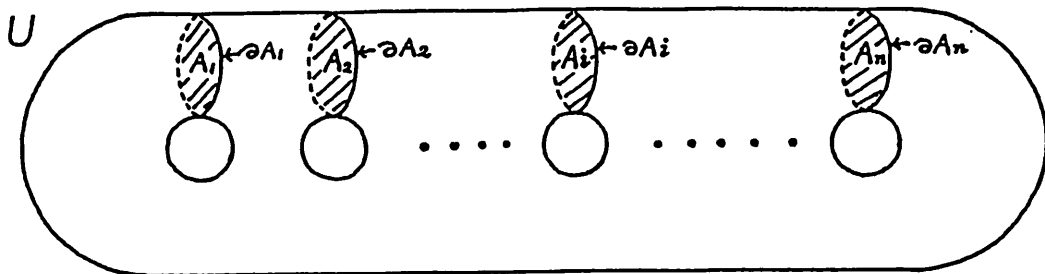


図1

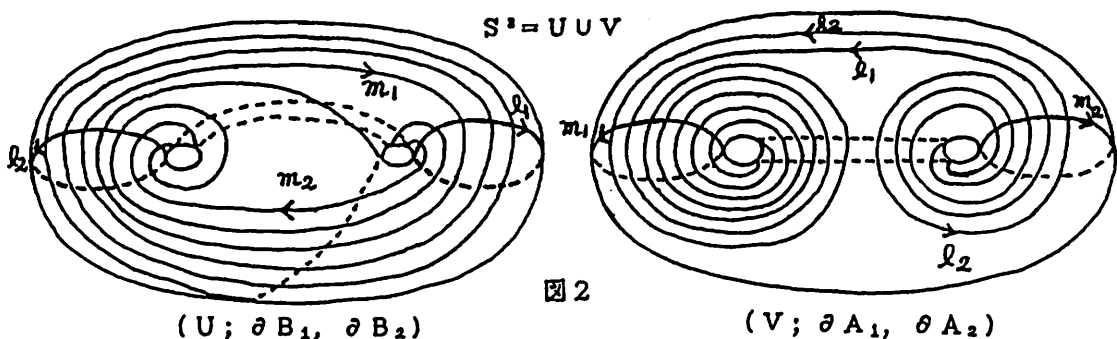


図2

Heegaard diagram の細分

以下 Heegaard diagram の各 loops には orientation を入れておく。

genus n の Heegaard splitting $(M^3; U, V, \mathcal{K})$ において, U と V をこれらの meridian-disk 系で切ってやると, U, V はそれぞれ 3-ball B^3 と B^3 になる. ∂B^3_u と ∂B^3_v はそれぞれ 2-球面 Σ_u と 2-球面 Σ_v であるが, Σ_u 上には切口の n 組の disjoint な disks の対 $\{A_i^+, A_i^-\}$, $i=1, 2, \dots, n$ が現れ, V の meridian 系 $\{\partial B_1, \partial B_2, \dots, \partial B_n\}$ は細かく切られて, 切口の n 組の disjoint な disks を結ぶ弧の集まりとなる. 同様に Σ_v 上にも切口の n 組の disjoint な disks の対 $\{B_i^+, B_i^-\}$, $i=1, 2, \dots, n$ が現れ, U の meridian 系 $\{\partial A_1, \partial A_2, \dots, \partial A_n\}$ は細かく切られて, 切口の n 組の disjoint な disks を結ぶ弧の集まりとなる. 図3

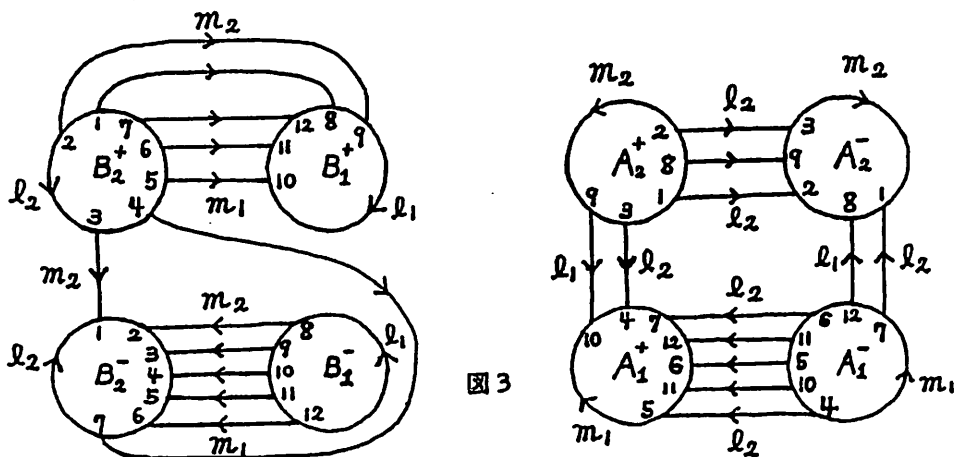


図3

従って M^3 は2つの halls B_0^+ と B_0^- をその境界の2-球面 Σ_0 と2-球面 Σ_0 で以下の
ように貼合わされてできるとみなせる。

その貼合わせを定める $\Sigma_0 + \Sigma_0$ 上の identification map とは、

(i) Σ_0 内の disks A_2^+ と A_2^- を同一視して A_2 とする同相写像 .

(ii) Σ_0 内の disks B_2^+ と B_2^- を同一視して B_2 とする同相写像 .

(iii) $\Sigma_0 - U (Int A_2^+ \cup Int A_2^-)$ から $\Sigma_0 - U (Int B_2^+ \cup Int B_2^-)$ への同相写像、
で構成され、特に (iii) の map は η から自然に誘導される。

$$H_0 \equiv (U A_2^+) \cup (U A_2^-) \cup (U \eta^{-1}(\partial B_2)) \subset \Sigma_0 \quad \text{および}$$

$$H_0 \equiv (U B_2^+) \cup (U B_2^-) \cup (U \eta(\partial A_2)) \subset \Sigma_0$$

はそれぞれ Σ_0 および Σ_0 上の graph を構成している。

$\Sigma_0 \cup \Sigma_0$ 上に現れるこれらの頂点、辺、面、に対して、identification map とで
同一視されるべき H_0 と H_0 の頂点、辺、面に同じ label をつけることにする。

定義5 H_0 および H_0 を M^3 の genus n Heegaard diagram の細分 とよび、 $H_0 \cup H_0$ を
Heegaard diagram の細分の対 とよぶ。

例1 つぎの定理1と定理2に与えられている図 (1-A) \cup (2-A), (1-B1) \cup (2-B1) および
§4の Examples の例1, 2の図 $H_0 \cup H_0$ を見よ。

Heegaard diagrams の移り変わり

定理1 M^3 の genus $n (\geq 2)$ の Heegaard diagram の細分 H_0 において、以下の移り変わりが
存在する：

$$(1) (1-A) \Leftrightarrow (1-B1) \quad (l \geq 2, p \geq 0)$$

$$(2) (1-A) \Leftrightarrow (1-B2) \quad (l \geq 2, q \geq 0)$$

定理2 M^3 の genus $n (\geq 2)$ の Heegaard diagram の細分 H_0 において、以下の移り変わりが
存在する：

$$(1) (2-A) \Leftrightarrow (2-B1) \quad (l \geq 2, p \geq 0)$$

$$(2) (2-A) \Leftrightarrow (2-B2) \quad (l \geq 2, q \geq 0)$$

定理1, 2は genus をかえない Heegaard diagrams の移り変わりであり、

(1-A) \Rightarrow (1-B1) と (2-A) \Rightarrow (2-B1) は交点数を $|1-p|$ だけ変化させる。

(1-A) \Rightarrow (1-B2) と (2-A) \Rightarrow (2-B2) は交点数を $|1-q|$ だけ変化させる。

定理3 M^3 の genus $n (\geq 2)$ の Heegaard diagram の細分 H_0 において、以下の移り変わりが
存在する：

$$(1) (3-A) \Leftrightarrow (3-B) \quad (n \geq 2)$$

$$(2) (4-A) \Leftrightarrow (4-B) \quad (n \geq 2)$$

(3-A) \Rightarrow (3-B) と (4-A) \Rightarrow (4-B) は、Heegaard diagram の交点数を n 減らし、
genus を1だけ下げる移り変わりである。

定理4 M^3 の genus n の Heegaard diagram の細分 H_u において、以下の移り変わりが存在する：

- (1) $(1-A) \Leftrightarrow (5-B1)$ ($n \geq 2$) ($l \geq 2, p \geq 1, q \geq 0$ or $l \geq 2, p \geq 0, q \geq 1$)
- (2) $(1-A)$ の図において、label D_j^* と D_i^* を交換したとき、 $m_{j,q}, N_1, \dots, N_{l-1}, S$ の位置に $m_{i,p}, M_1, \dots, M_{l-1}, U$ 以外の ∂D_j^* の連続する 1-cells があれば、(1) と同様な変換が可能である。そしてこれは Heegaard genus = 1 でも可能である。
- (3) $(2-A) \Leftrightarrow (5-B2)$ ($n \geq 2$) ($l \geq 2, p \geq 1, q \geq 0$ or $l \geq 2, p \geq 0, q \geq 1$)
- (4) $(2-A)$ の図において、 $m_{i,p}, M_1, \dots, M_{l-1}, U$ と $m_{j,q}, N_1, \dots, N_{l-1}, S$ が同じ meridian の細分となっているような場合でも(3)と同様な変換が可能である。
そしてこれは Heegaard genus = 1 でも可能である。

(1) から (4) の \Rightarrow の変換は、Heegaard diagram の genus を 1 だけ上げる移り変わりである。そして $l \geq 3$ のときは、交点数を $l-3$ 減らし、 $l=2$ のときは交点数を 1 増やす Heegaard diagrams の移り変わりである。

定理5 M^3 の genus $n (\geq 2)$ の Heegaard diagram の細分 H_u において、以下の移り変わりが存在する：

- (1) $(6-A) \Leftrightarrow (6-B)$ ($n \geq 2$)
 - (2) $(7-A) \Leftrightarrow (7-B)$ ($n \geq 2$)
- $(6-A) \Rightarrow (6-B)$ と $(7-A) \Rightarrow (7-B)$ は Heegaard diagram の genus を 1 だけ下げて交点数を 2 だけ減らす移り変わりである。

実際の Heegaard diagrams の変換の仕方

定理1の(1) $(1-A) \Rightarrow (1-B1)$ の変換

$(1-A)$ から $(1-A')$ の図を作り labels X_1, X_2, \dots, X_{l-2} を付ける。次に $(1-A')$ から $(1-A'')$ のように斜線部分を消して太線を追加した図を作る。そして図のように labels $X_{1+3}, X_{1+4}, \dots, X_{1+p}, X_1$, labels $m_{i,q+1}, \dots, m_{i,q+p-1}, m_{i,q+p}$, および labels E_1, E_2, \dots, E_p を書き込めば $(1-B1)$ と同じ Heegaard diagram が得られる。(2) $(1-A) \Rightarrow (1-B2)$ の変換も(1)の変換と同様に行えばよい。

定理2の(1) $(2-A) \Rightarrow (2-B1)$ の変換

$(2-A)$ から $(2-A')$ の図を作り、labels X_2, X_3, \dots, X_{l-2} を書き込む。次に $(2-A')$ から $(2-A'')$ の図を作る。そして図のように labels $X_{1+3}, X_{1+4}, \dots, X_{1+p}, X_1$, labels $m_{i,q-1}, \dots, m_{i,q+p-1}, m_{i,q+p}$, および labels E_1, E_2, \dots, E_p を書き込めば $(2-B1)$ と同じ Heegaard diagram が得られる。(2) $(2-A) \Rightarrow (2-B2)$ の変換も(1)の変換と同様に行えばよい。

定理3は簡単な変換である。

定理4の(1) (1-A) \Rightarrow (5-B1) の変換

(1-A)から(1-A')の図を作りlabels X_1, X_2, \dots, X_{1-2} を付ける. 次に(1-A')から X_1 を消去して, 1辺形 P, Q, R 追加した(5-B1)の図を作ればよい.

(3) (2-A) \Leftrightarrow (5-B2) の変換は(2-A)から(2-A')の図を作り, labels X_2, X_3, \dots, X_{1-2} を書き込む. 次に(2-A')から3辺形 PQR を2つ追加した(5-B2)の図を作ればよい.

(2)と(4)の \Rightarrow の変換は(1)と(2)の \Rightarrow の変換と同様にすればよい.

定理5は簡単な変換である.

§4 では S^3 , 正12面体空間 π および レンズ空間 $L(7, 2)$, $L(7, 4)$ の Heegaard diagrams の移り変わりの例を与えるので, 先に §4 を読んでから, この後, 次の §2 と §3 を読んでよい. §4 の変換の解説文は, §3 の主定理の証明の後にある.

§ 2. DS-diagram と DS-変形

連結な DS-diagram

定義 6 2-球面 S^2 上に描かれた connected 3-regular graph を $G=(V:E)$ とする. V は G の vertices の集合であり, E は G の edges の集合である. $S^2 - |G|$ の closure を元とする集合を F とする. そのとき S^2 は V, E, F の各元をそれぞれ 0-, 1-, 2-cell とする cell structure を自然にもつ. 各 cell には orientation を入れておく. このように考えたときの oriented cell complex $K=V \cup E \cup F$ を DS-complex とよぶ.

定義 7 S^2 上の connected 3-regular graph を $G=(V:E)$, DS-complex を $K=V \cup E \cup F$ とする. DS-complex K が次の条件を満たすとする:

- (1) 各 0-cells, 1-cells, 2-cells について, 同じ label が付いている 2-cells が 2 つずつある. 同じ label が付いている 1-cells が 3 つずつある. 同じ label が付いている 0-cells が 4 つずつある.
- (2) F の各 2-cell に対して, 同じ label が付けられてる 2-cells $\{\tau_i, \tau_i'\}$ ($i=1, \dots, n, n \geq 2, \tau_i \cap \tau_i' = \emptyset$ or $\tau_i \cap \tau_i' \neq \emptyset$) の τ_i と τ_i' の向きは反対であり, $\partial \tau_i$ 上の 1-cells の個数と, $\partial \tau_i'$ 上の 1-cells の個数は等しい.
- (3) (2) の τ_i と τ_i' の貼合わせとその boundary $\partial \tau_i$ と $\partial \tau_i'$ 上の 0-cells および 1-cells どうしの貼合わせは, 0-cells および 1-cells の labels および各 1-cell の向きも含めて τ_i と τ_i' の貼合わせと compatible である.

同じ label のついた 0-cells, 1-cells, 2-cells を同一視する写像を f とする.

このとき (G, f) を DS-diagram (=diagram of a Developed Shape for 3-manifold) とよぶ. (DS-diagram の定義は [1], [7] に詳しくかいてある)

定理 6 任意の可付向閉 3-多様体は, DS-diagram で表現できる.

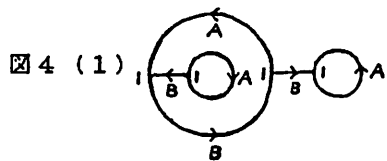
例 2 あわび, 正 12 面体空間 $\pi \rightarrow$ 図 4 (次ページ)

定義 8 DS-diagram (G, f) において,

- (1) $(G-1) \Leftrightarrow (G-2)$ を D_3 -変形, $(G-3) \Leftrightarrow (G-4)$ を D_2 -変形 と呼ぶ.
 D_2 -変形と D_3 -変形を総称して 初等 DS-変形 という.
- (2) $(G-5) \Leftrightarrow (G-6)$ を D_{n+2} -変形 ($n \geq 2$), $(G-7) \Leftrightarrow (G-8)$ を D_n -変形 ($n \geq 2$) と呼ぶ.
(1) と (2) を総称して DS-変形 という.

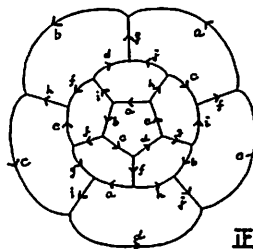
定理 7 DS-変形は, DS-構造および 可付向閉 3-多様体の同相性を保存する変形である.

例 3 図 4 の (3) の S^3 の DS-diagram に DS-変形を行うと, よく知られた (1) の「あわび」に到達する. 図 4 の (4) の正 12 面体空間 π の DS-diagram に DS-変形を行うと, (2) のよく知られた正 12 面体空間 π の図に到達する (練習問題).

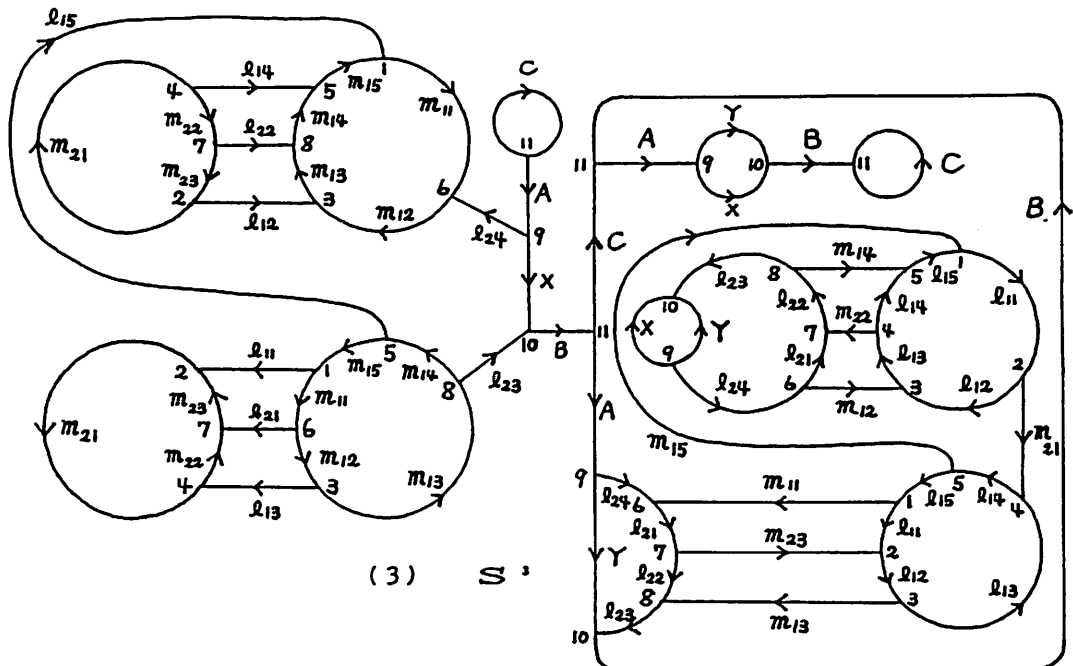


あわび = S^3

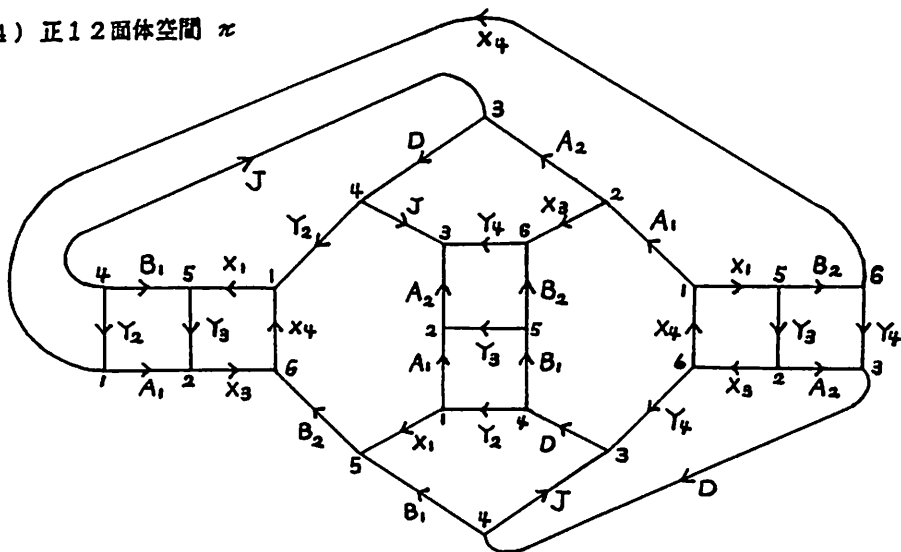
(2)



正12面体空間 π



(4) 正12面体空間 π



非連結な DS-diagram

1つの DS-diagram (G, f) が与えられたとき、これから非連結な DS-diagram (連結成分は2つ) を以下のように構成することができる:

まず勝手な同じ label ϵ の 1-cells を3つ選ぶ(図5)。次に各 1-cells ϵ の中点を中心として ϵ の長さの $1/4$ を半径とする disks D をとる。

$\{G - (D \cap \epsilon)\} \cup \partial D$ の ∂D と $\epsilon - (D \cap \epsilon)$ の部分に図のように向きをつけた labels をつけくわえる。このようにして得られた graph を G_1' とする。 G_1' の外部に図のような S^2 上に描かれた3つの disks を bound する向きをつけた labels P, Q, R をもつ3つの 1-cells からなる

connected 3-regular graph G_2' を作る。

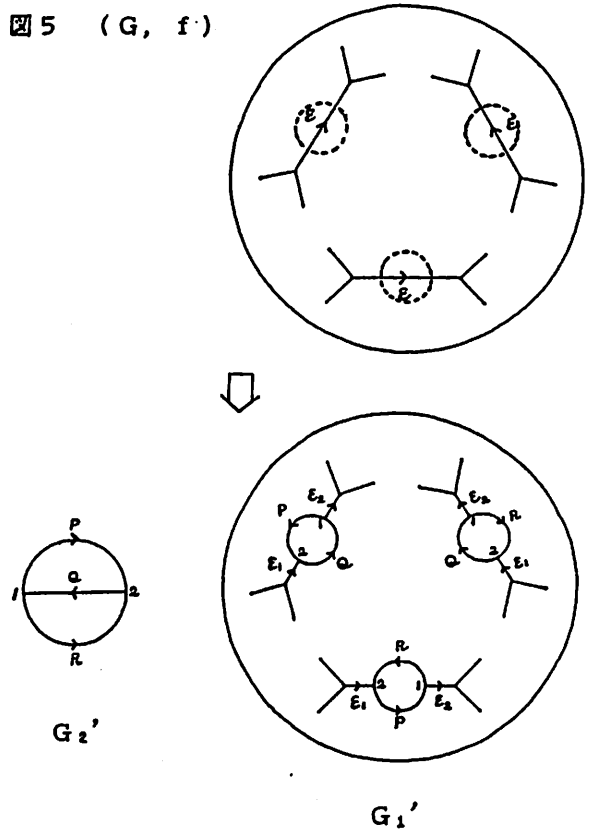
$G_1' \cap G_2' = \emptyset$ であり、 $G_1' \cup G_2'$ は DS-diagram の連結性を除いた他の条件を満たしている。

このようにして得られた非連結な DS-diagram $G_1' \cup G_2'$ に対して、graph G_2' の辺の個数が増えるように $G_1' \cup G_2'$ に有限回の初等変形を行う。ただし、各 graph に対して連結性を保存する有限回の初等変形を行う。

その結果 G_1' からできる graph を G_1 、 G_2' からできる graph を G_2 とする。DS-変形は DS-構造を変えないから、graphs $G_1 \cup G_2$ も連結性を除いた DS-diagram の条件を満たしている。

そこで同じラベルの頂点、辺、面を同一視する identification map を g とする。

図5 (G, f)



定義9 (G_1, G_2, g) を (一般の) 非連結な DS-diagram という。

定理7 任意の可付向閉3-多様体は非連結な DS-diagram (G_1, G_2, g) で表現できる。

定理8 genus $n (\geq 1)$ の連結な Heegaard diagram $(U; \partial B_1, \partial B_2, \dots, \partial B_n), (V; \partial A_1, \partial A_2, \dots, \partial A_n)$ の細分の対 $H_u \cup H_v$ は非連結な DS-diagram である。

証明 $U \partial A_i \cap U \partial B_j = \{p_1, p_2, \dots\}$ とする. これらの頂点の中の1つを p とする. 図6 $\partial A_i (C \partial U)$, $\partial B_j (C \partial V)$ はいくつかの頂点で線分

$\{m_{i1}, m_{i2}, \dots\} \subset \partial U$, $\{l_{j1}, l_{j2}, \dots\} \subset \partial V$ に細分されている. ところが $\{l_{j1}, l_{j2}, \dots\} \subset \partial U$, $\{m_{i1}, m_{i2}, \dots\} \subset \partial V$ でもある.

U, V を各 meridian disks A_i, B_j で切れば, A_i は A_i^+ と A_i^- に, B_j は B_j^+ と B_j^- に分かれる. そのとき p は4つの場所に分かれ, 各 p のところで graph は 3-regular になっている. また線分 m_{ik}, l_{jq} は3つに分かれる. 従って4つの場所に分かれた頂点 p には同じ label をつけ, 3つに分かれた線分にも同じ label をつける. また

$(\partial U - U \partial A_i)$ の 2-cells と $(\partial V - U \partial B_j)$ の 2-cells には 1対1 の貼合わせが, $(M^3; U, V, \eta)$ の η により指定されるから, 同じ貼合わせの $(\partial U - U \partial A_i)$ 上の 2-cell と $(\partial V - U \partial B_j)$ 上の 2-cell に同じ label をつける.

以上で H_u, UH_v は連結性を除いた DS-diagram の条件 (1), (2), (3) を満たしている. Q. E. D.

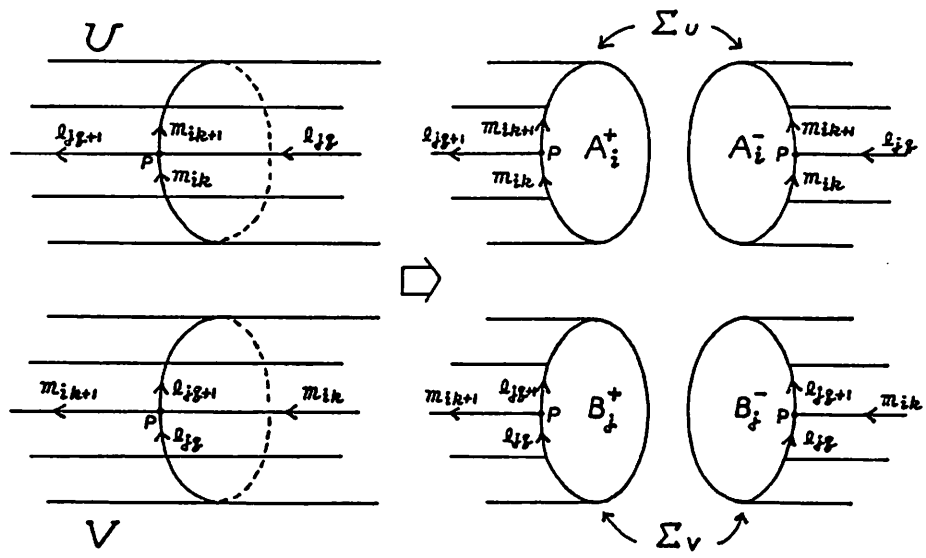


図 6

§ 3. 主定理 (定理 1, 2, 3, 4, 5) の証明

定理 1 と定理 2 の証明

定理 1 の (1) (1-A) \Leftrightarrow (1-B1) と定理 2 の (1) (2-A) \Leftrightarrow (2-B1) を同時に証明する. Heegaard diagram の細分の対 $H_u \cup H_v$ の H_u に対応するほうを (1-A), H_v に対応するほうを (2-A) とする. 他方 Heegaard diagram の細分の対 $H_{u'} \cup H_{v'}$ の $H_{u'}$ に対応するほうを (1-B1) とし, $H_{v'}$ に対応するほうを (2-B1) とする.

$H_u \cup H_v$ には B_1, B_2, \dots, B_1 の階段の部分があるので, $D_{1,2}$ -変形の (G-6) \rightarrow (G-5) を行くと, (1-A') \cup (2-A') と同じ図を得る.

他方 $p \geq 2$ のとき, $H_{u'} \cup H_{v'}$ には E_1, E_2, \dots, E_p の階段の部分があるので, $D_{p,2}$ -変形の (G-6) \rightarrow (G-5) を行くと, (1-A') \cup (2-A') と同じ図を得る.

$p=1$ のときは, (1-A') \cup (2-A') の図に D_3 -変形の (G-2) \rightarrow (G-1) を行くと (1-B1) \cup (2-B1) を得る.

$p=0$ のときは, (1-A') \cup (2-A') の図に D_2 -変形の (G-4) \rightarrow (G-2) を行くと (1-B1) \cup (2-B1) を得る.

ゆえに (1-A) \Leftrightarrow (1-B1) および (2-A) \Leftrightarrow (2-B1) の移り変わりが存在する.

(1-A) \Leftrightarrow (1-B2) と (2-A) \Leftrightarrow (2-B2) の移り変わりも同様にして証明される. Q. E. D.

(1-A) \Leftrightarrow (1-B1) の移り変わりと (2-A) \Leftrightarrow (2-B1) の移り変わりを同時に証明したが, (1-A) \Leftrightarrow (1-B1) と (2-A) \Leftrightarrow (2-B1) は独立に変換できる. 具体例はつぎの § 4 で与えられる.

定理 3 の証明 (3-A) \Leftrightarrow (3-B) と (4-A) \Leftrightarrow (4-B) を同時に証明する.

Heegaard diagram の細分の対 $H_u \cup H_v$ の H_u に対応するほうを (3-A), H_v に対応するほうを (4-A) とする. このとき Heegaard splitting $M^3 = U \cup V$ において, (3-A), (4-A) に対応する部分は (3-C) のようになっている. つまり loop Y_{n-1} は disk D を bound しているから, 各 loops の一部分である $A_1 B_1, \dots, A_{n-1} B_{n-1}$ のところを ambient isotopy で D 上を左に滑らせて 2つの loops $Y_{n-1}, X_1 X_2 \dots X_n$ と交わらないようにできる. すなわち $A_1 B_1, \dots, A_{n-1} B_{n-1}$ の部分が handle をまわっていないようにできる. このあと handlebody V を meridian disk D で切って得られる handlebody を V' とし, $M^3 - V'$ を U' とする. $M^3 = U' \cup V'$ は genus が 1 下がった Heegaard splitting であり, その Heegaard diagram の一部分が (3-B) と (4-B) である. ゆえに (3-A) \Leftrightarrow (3-B) と (4-A) \Leftrightarrow (4-B) の移り変わりが存在する. Q. E. D.

(3-A) \Leftrightarrow (3-B) と (4-A) \Leftrightarrow (4-B) は独立にそれぞれ変換できる.

定理 4 の証明 (1) (1-A) \Leftrightarrow (5-B1) と (3) (2-A) \Leftrightarrow (5-B2) を同時に証明する.

Heegaard diagram の細分の対 $H_u \cup H_v$ の H_u に対応するほうを (1-A), H_v に対応するほうを (2-A) とし, 定理 1, 2 の証明と同様にして (1-A') \cup (2-A') までの変形を行う. 次に (1-A') \cup (2-A') に (G-1) \rightarrow (G-2) を行くと, (5-B1) \cup (5-B2) と同じ図を得る. (2) と (4) は (1), (3) の証明方法とまったく同様にできる. Q. E. D.

(1) から (4) は独立に変換できる.

定理5の証明 (1) (6-A) \Rightarrow (6-B) と (2) (7-A) \Rightarrow (7-B) を同時に証明する.

Heegaard diagram の細分の対 $H_u \cup H_v$ の H_u に対応するほうを (6-A), H_v に対応するほうを (7-A) とし、 $H_u \cup H_v = (6-A) \cup (7-A)$ に DS-変形の (G-4) \rightarrow (G-3) を行うと (6-B) \cup (7-B) の図を得る. Q. E. D.

(6-A) \Leftrightarrow (6-B) と (7-A) \Leftrightarrow (7-B) は独立にそれぞれ変換できる.

§ 4. Examples S^3 , 正 1 2 面体空間 π , レンズ空間 $L(7, 2), L(7, 4)$

例 1 S^3 1 の H_u に (1-A) \Rightarrow (1-B1) を行うと 2 を得る. 2 の H_u に (1-A) \Rightarrow (1-B1) を行うと 3 を得る. 3 の H_u に (1-A) \Rightarrow (1-B1) を行うと 4 を得る. 4 の H_u に (2-A) \Rightarrow (2-B1) を行うと 5 を得る. 5 の H_u に (3-A) \Rightarrow (3-B) を行うと 6 の genus 1 の Heegaard diagram の H_u を得る.

例 2 S^3 1 の H_u に (2-A) \Rightarrow (2-B1) を行うと 2 を得る. 2 の H_u に (2-A) \Rightarrow (2-B1) を行うと 3 を得る. 3 の H_u に (2-A) \Rightarrow (2-B1) を行うと 4 を得る. 4 の H_u は例 1 の 4 の H_u と同じである.

例 3 π 1 の H_u に (2-A) \Rightarrow (2-B1) を行うと 2 を得る. 2 の H_u に (1-A) \Rightarrow (1-B1) を行うと 3 を得る. 3 を書き直して新しい labels を付ける. 3 の H_u は H. Poincaré が構成した正 1 2 面体空間である.

例 4 $L(7, 2)$ と $L(7, 4)$

$L(7, 2) \cong L(7, 4)$ (\cong : 同相) であり, $L(7, 2)$ の genus 1 の Heegaard diagram の細分を H_u としたとき, その対 H_v はちょうど $L(7, 4)$ の genus 1 の Heegaard diagram の細分になっている. すなわち $L(7, 2) = H_u \cup H_v$ としたとき, H_u が $L(7, 2)$ の genus 1 の Heegaard diagram の細分のとき, H_v が $L(7, 4)$ の genus 1 の Heegaard diagram の細分となる.

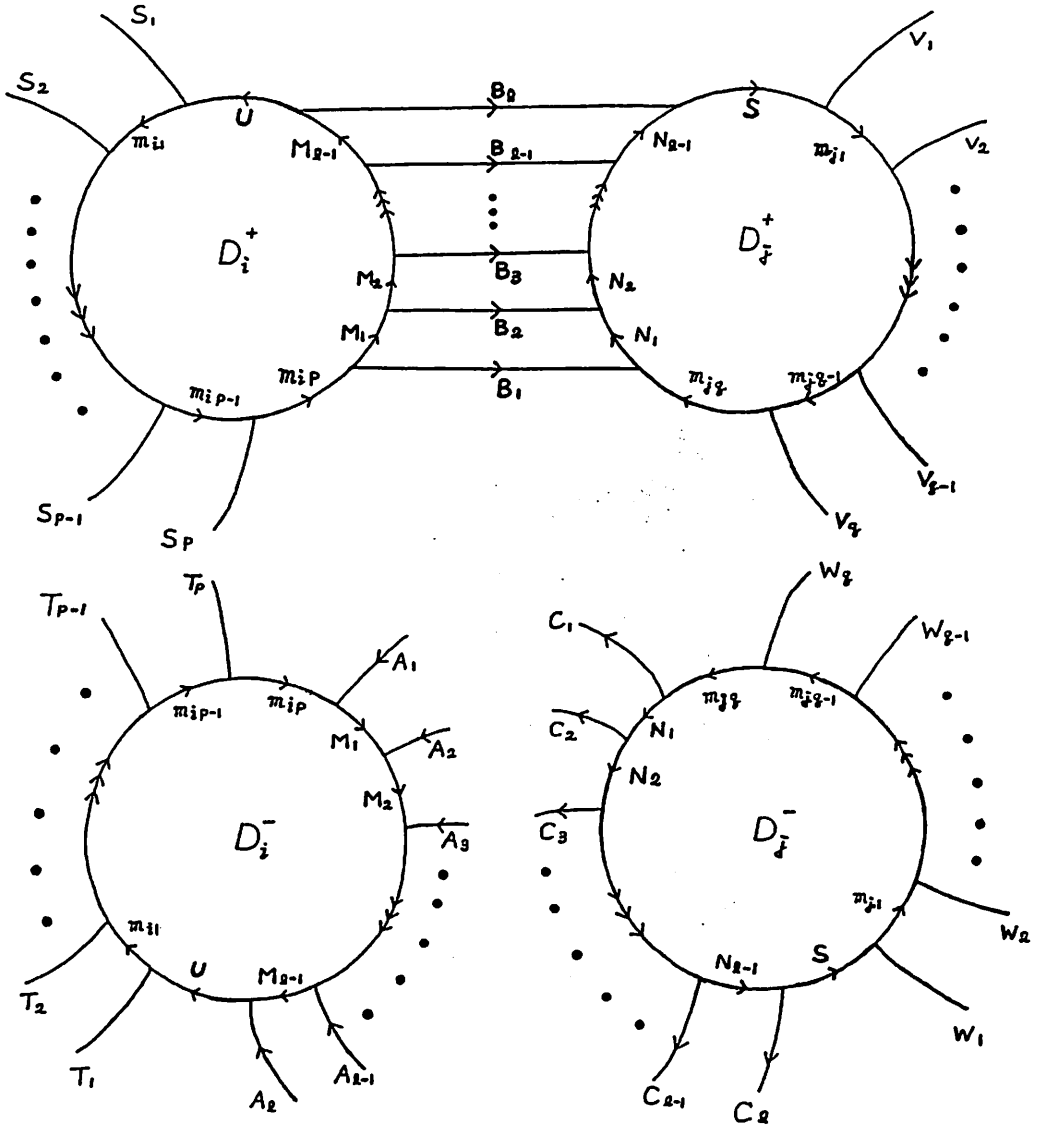
$L(7, 2)$ の 1 の H_u に定理 4 の (2) の変換を行うと, 2 の genus 2 の Heegaard diagram の細分 H_u を得る. 2 の H_u に (1-A) \Rightarrow (1-B1) を行うと 3 を得る. 3 の H_u に (2-A) \Rightarrow (2-B1) を行うと 4 を得る. 4 の H_u に (2-A) \Rightarrow (2-B1) を行うと 5 を得る. 5 の H_u に (7-A) \Rightarrow (7-B) を行うと, 6 の $L(7, 4)$ の genus 1 の Heegaard diagram の細分 H_u を得る.

従って $L(7, 2)$ と $L(7, 4)$ の Heegaard diagram の移り変わりが存在する.

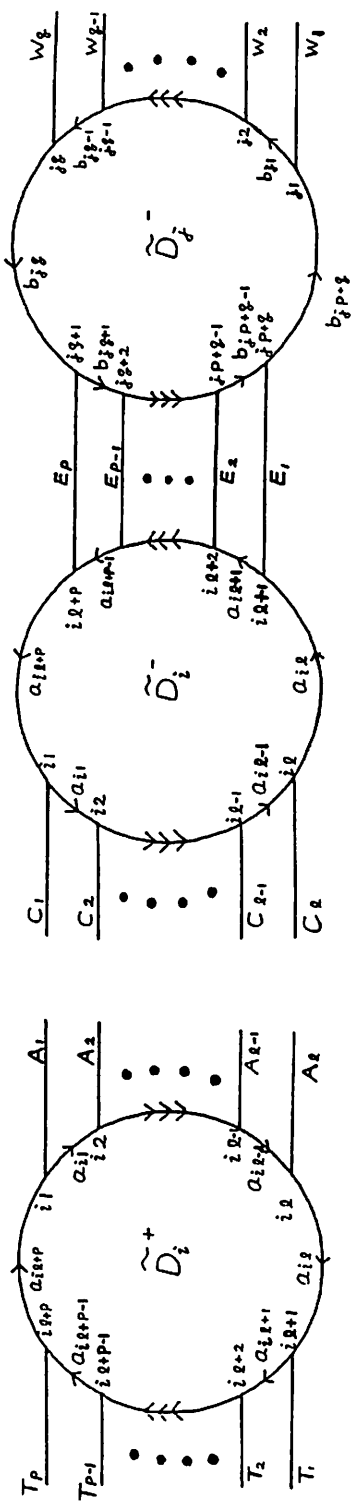
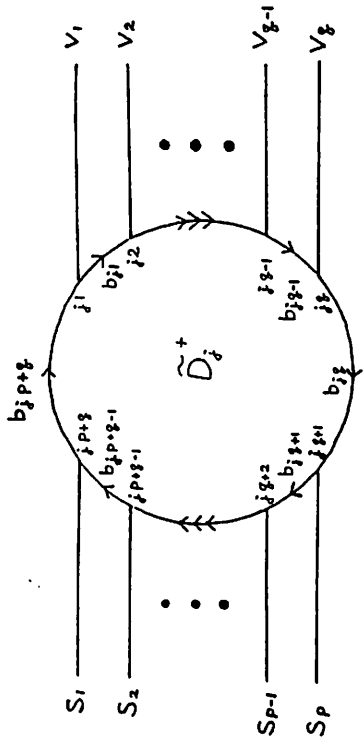
例 5 Wave を持たない S^3 の genus 3 の Heegaard diagram

例 5 の H_u に (1-A) \Rightarrow (1-B1) および (2-A) \Rightarrow (2-B1) を繰り返し行うと wave を持つ S^3 の genus 3 の Heegaard diagram が得られる. また (1-A) \Rightarrow (1-B1), (2-A) \Rightarrow (2-B1) および (3-A) \Rightarrow (3-B) を繰り返し行うと genus 1 の Heegaard diagram が得られるであろう.

(1 - A)

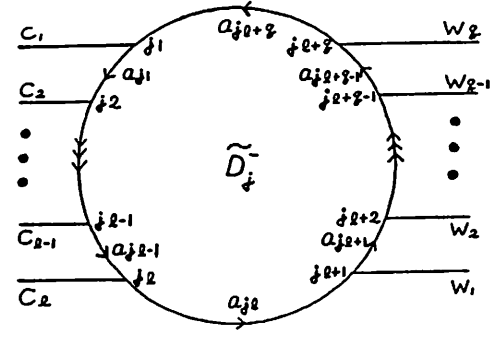
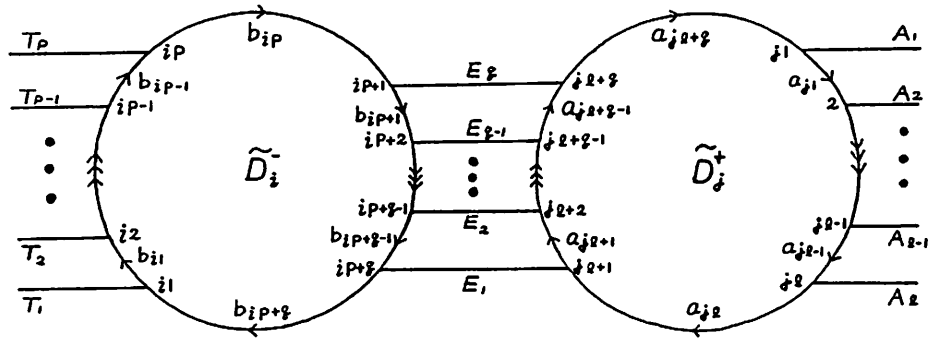
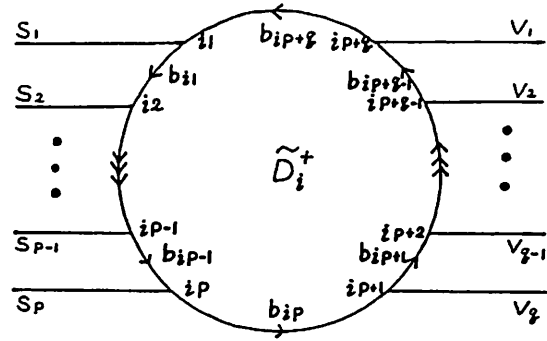


(1 - B 1)

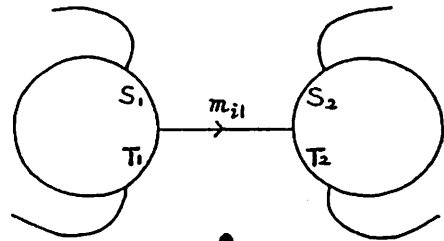
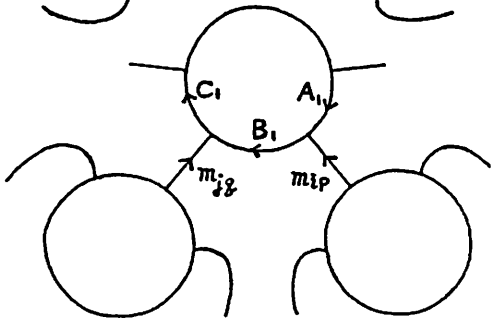
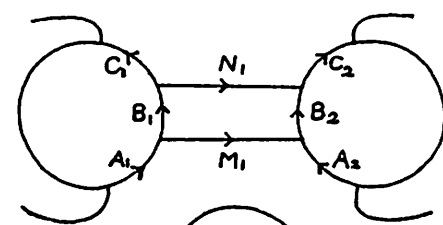
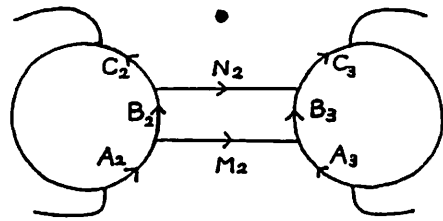
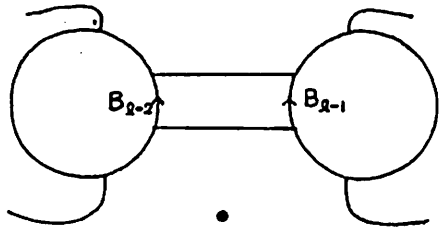
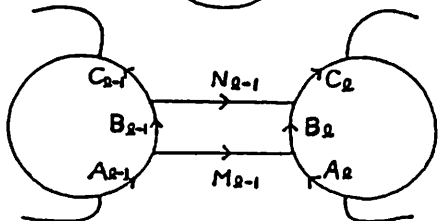
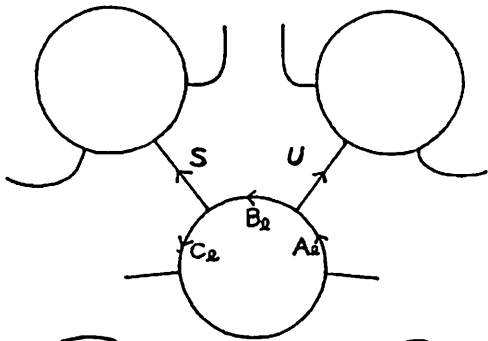


1
0
1

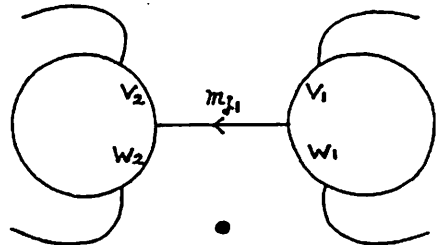
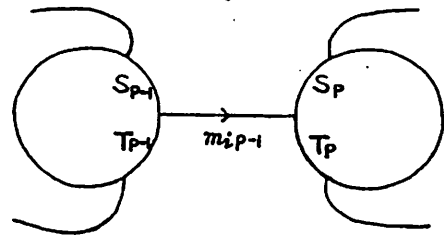
(1 - B 2)



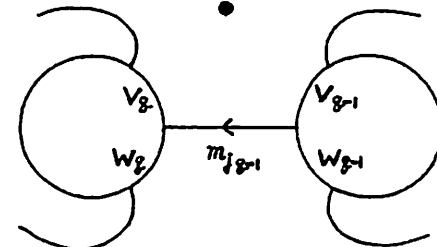
(2 - A)



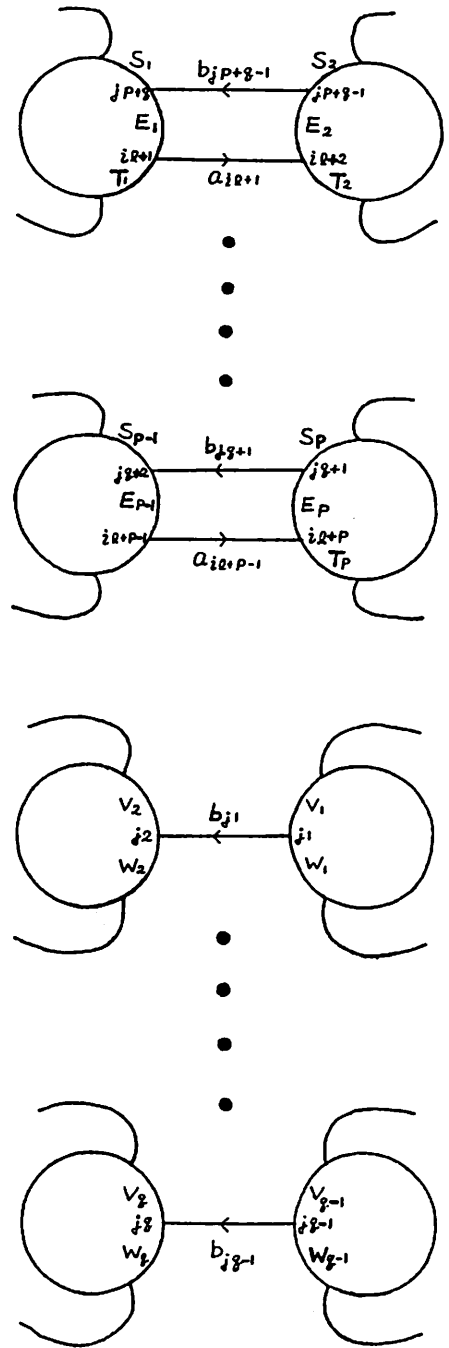
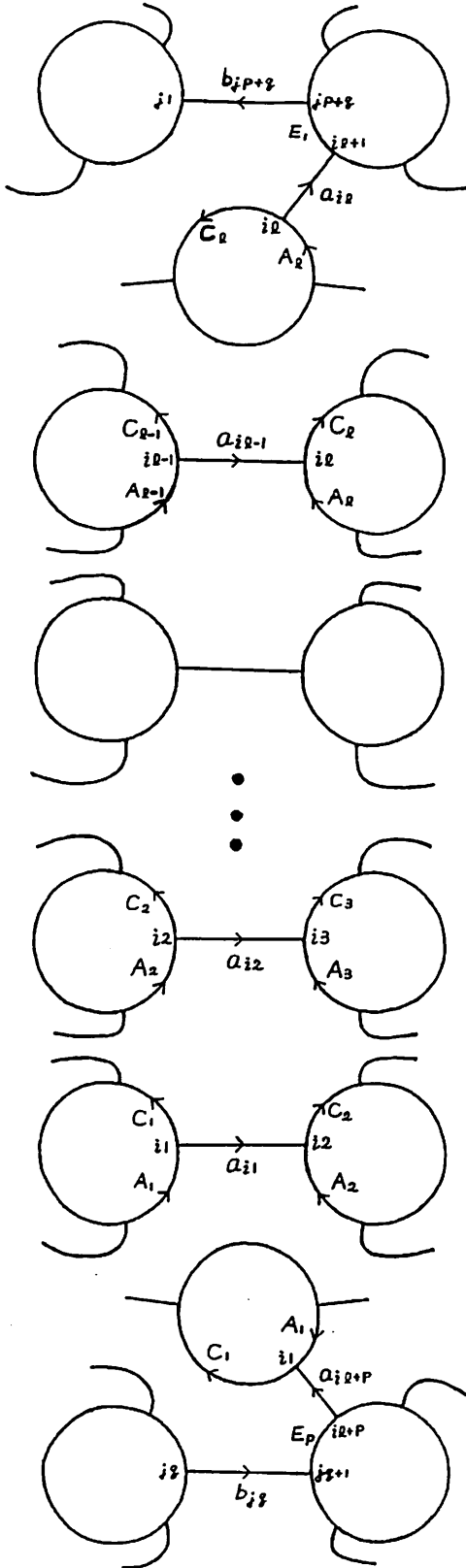
⋮



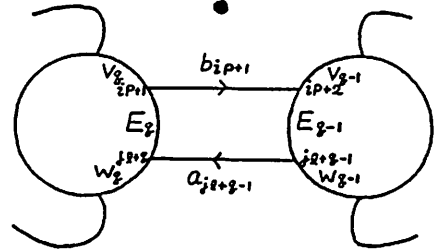
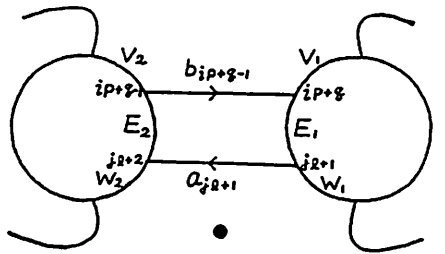
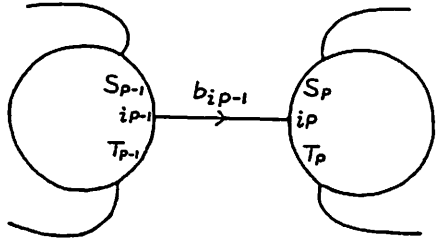
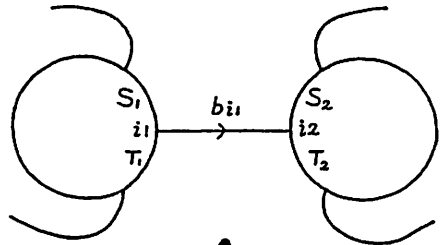
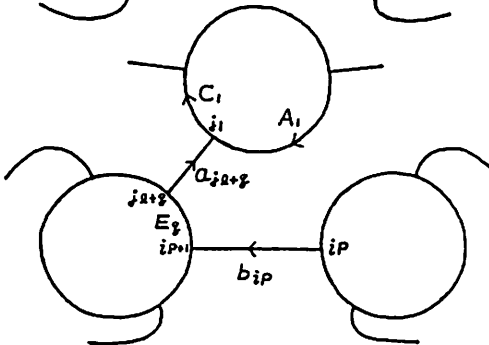
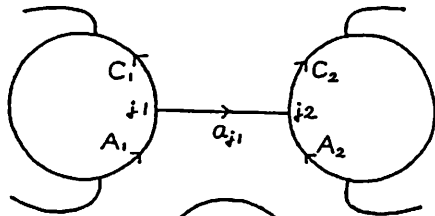
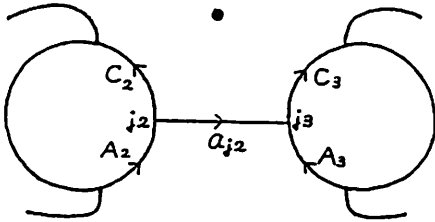
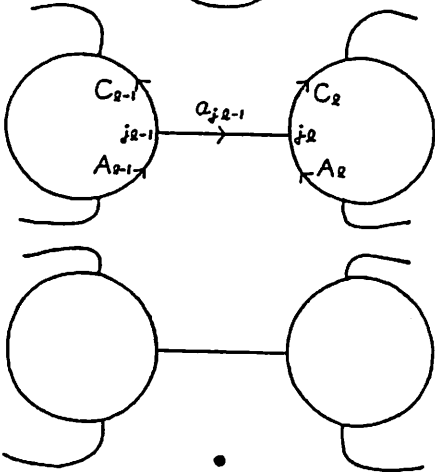
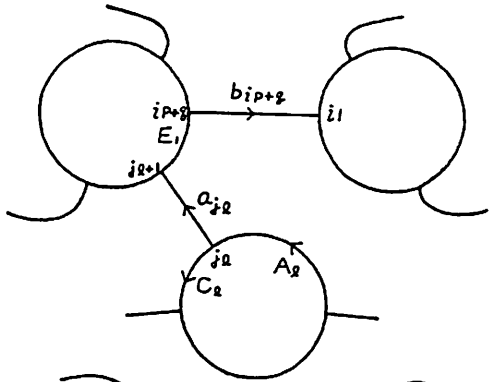
⋮



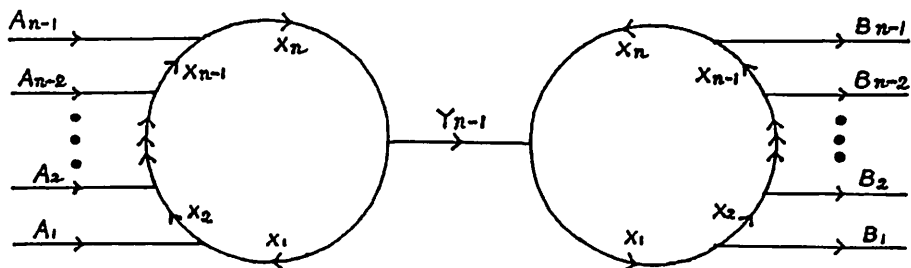
(2 - B 1)



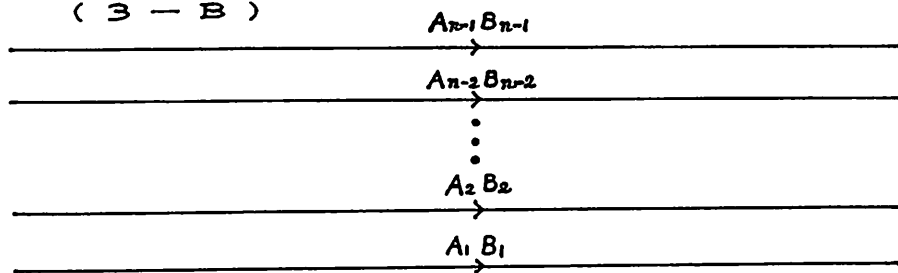
(2 - B 2)



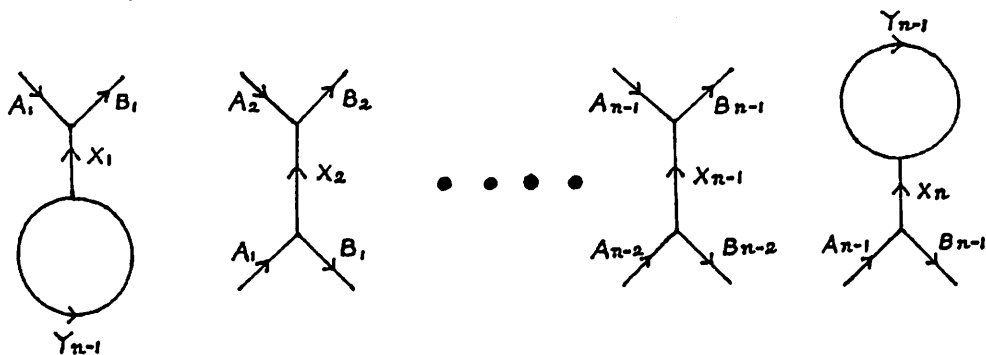
(3 - A)



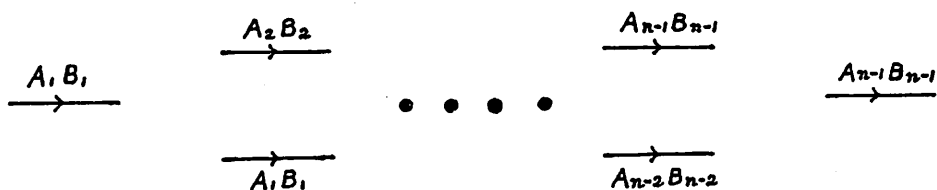
(3 - B)



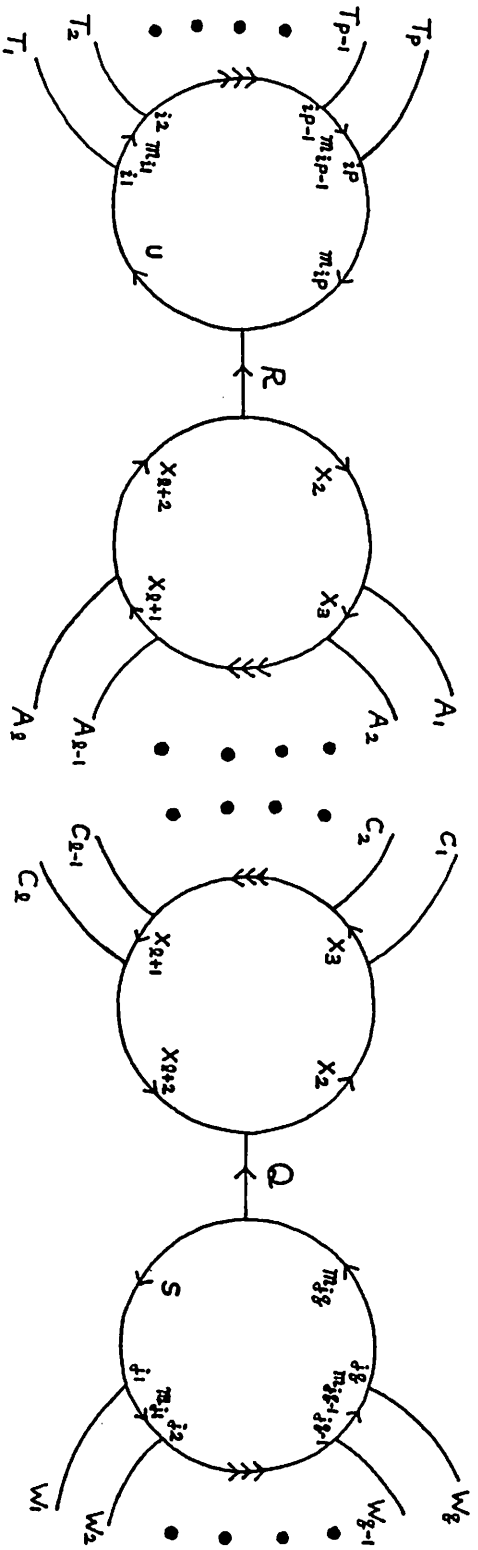
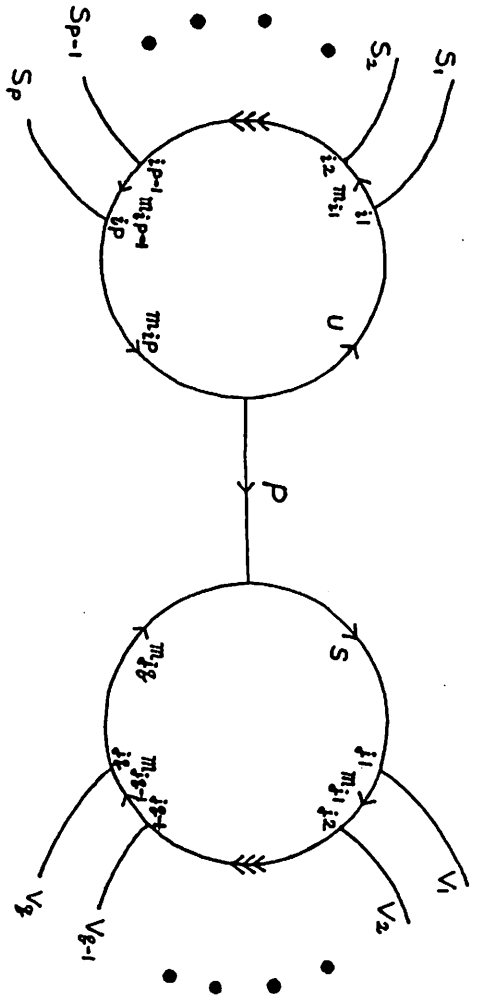
(4 - A)

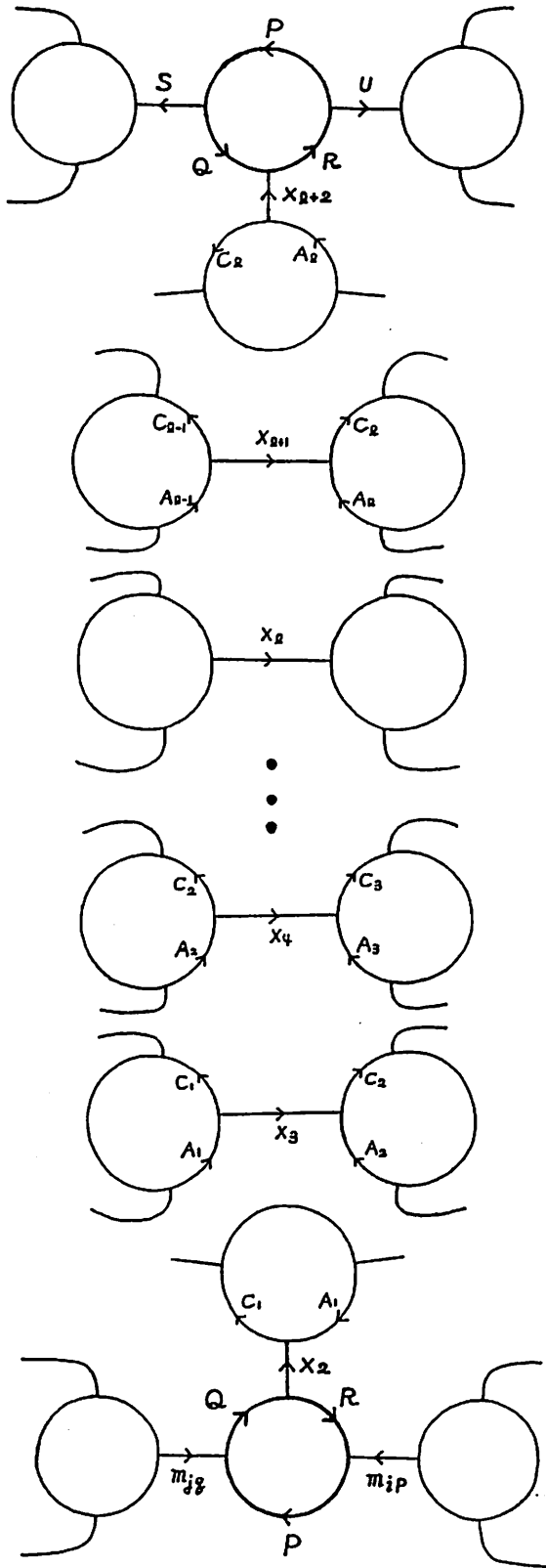


(4 - B)

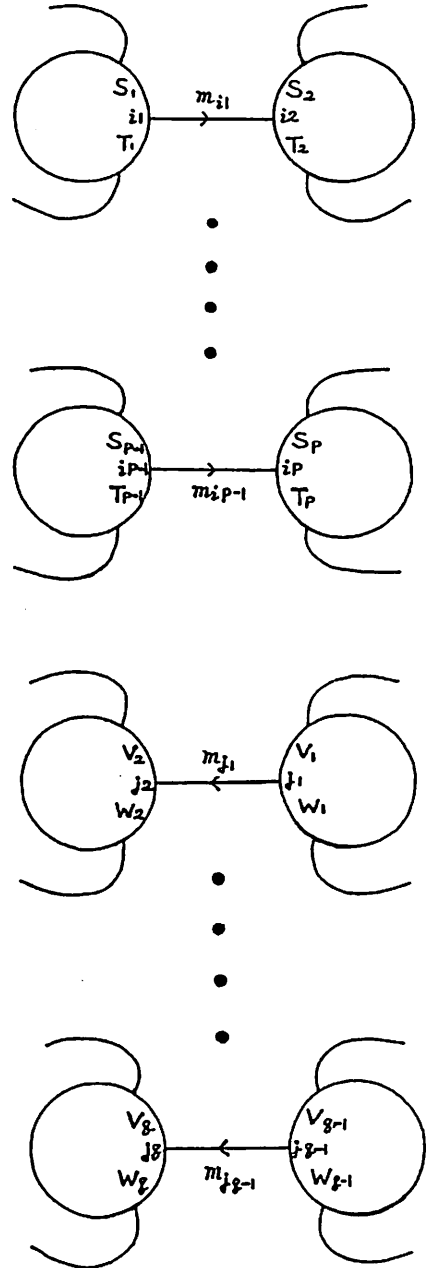


(5 - B 1)

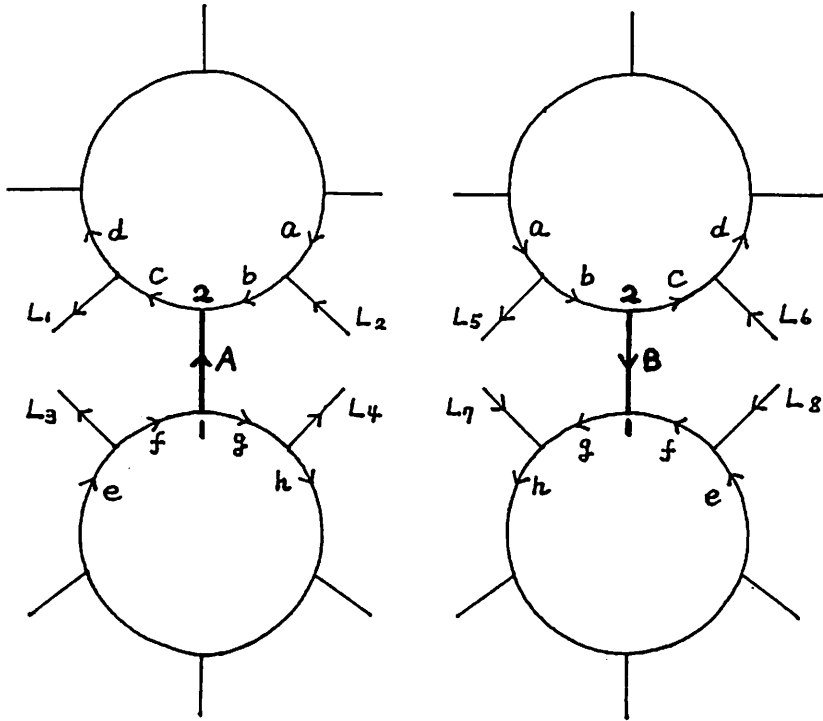




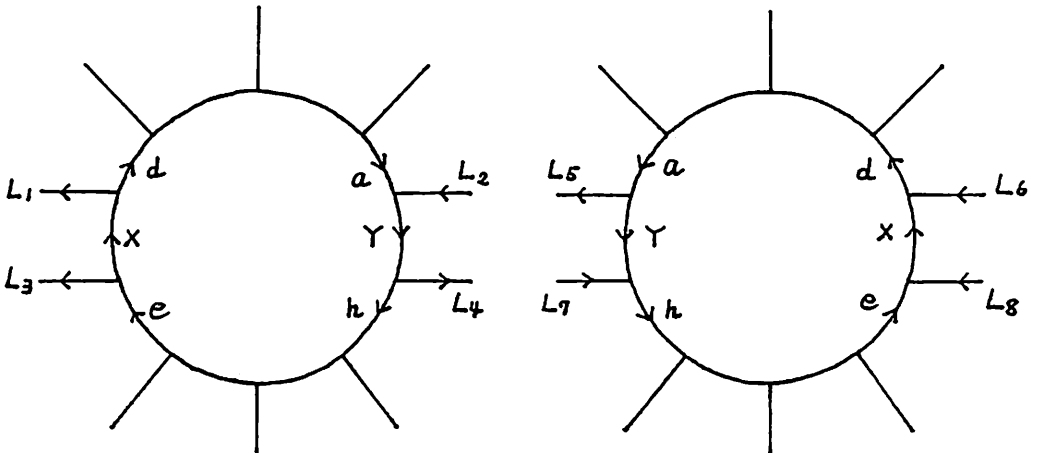
(5 - B 2)



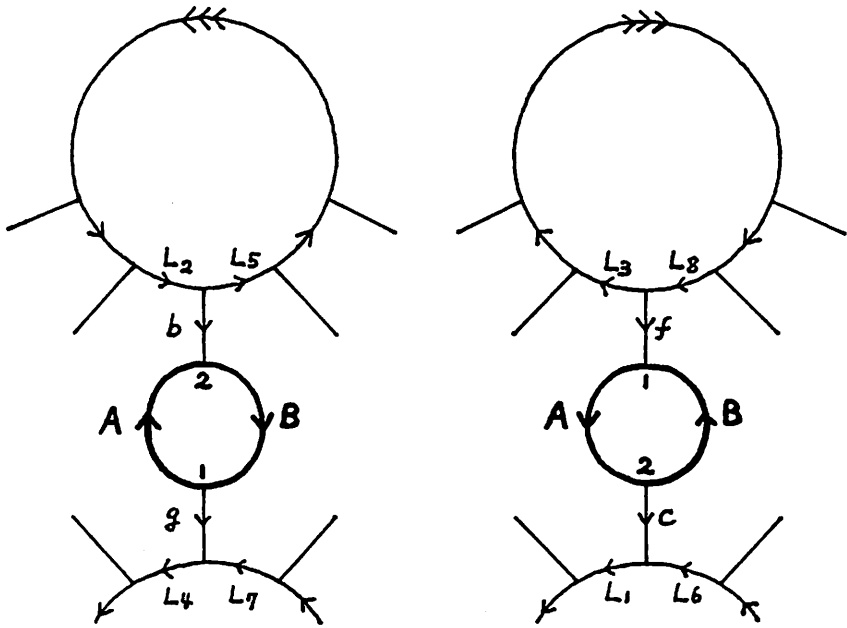
(6 - A)



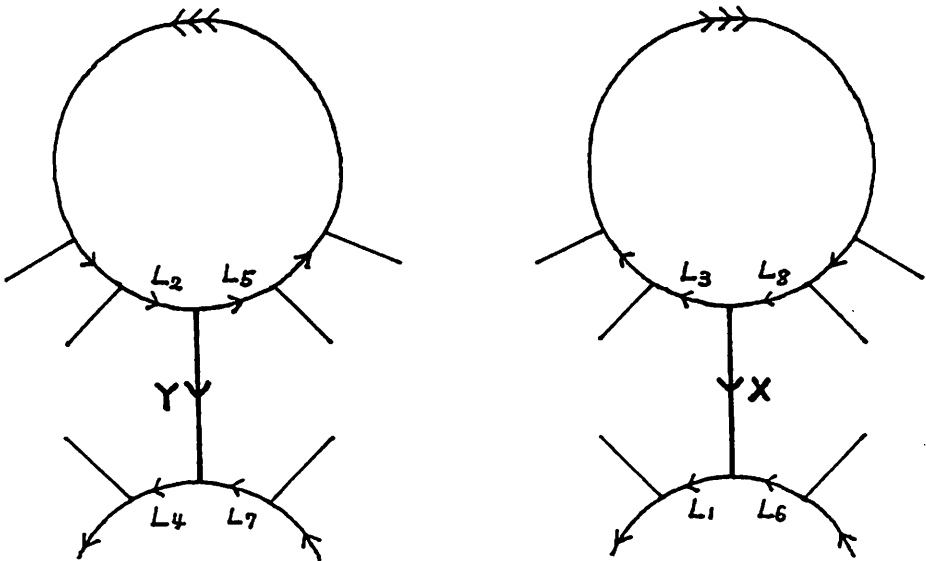
(6 - B)



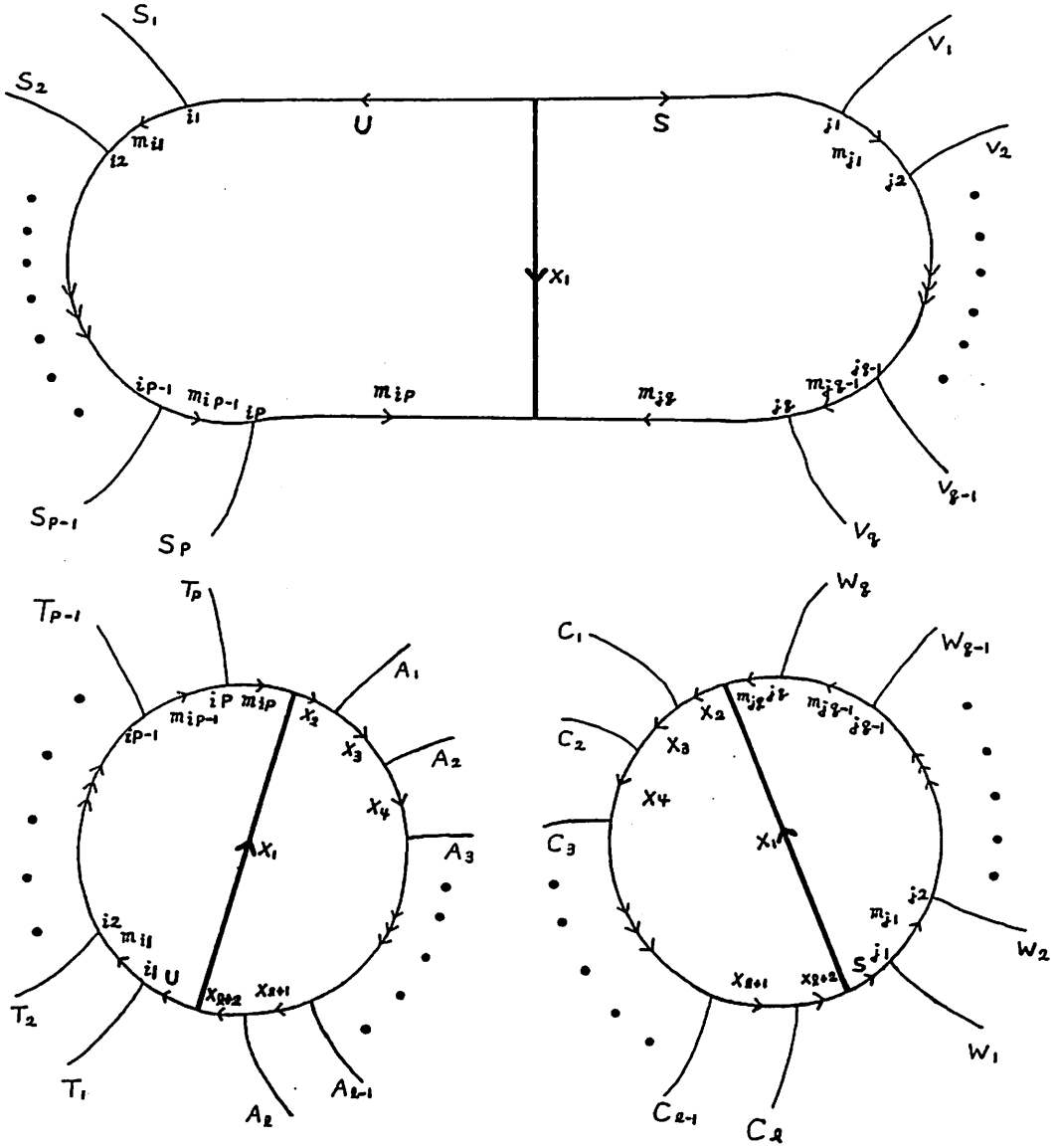
(7 - A)



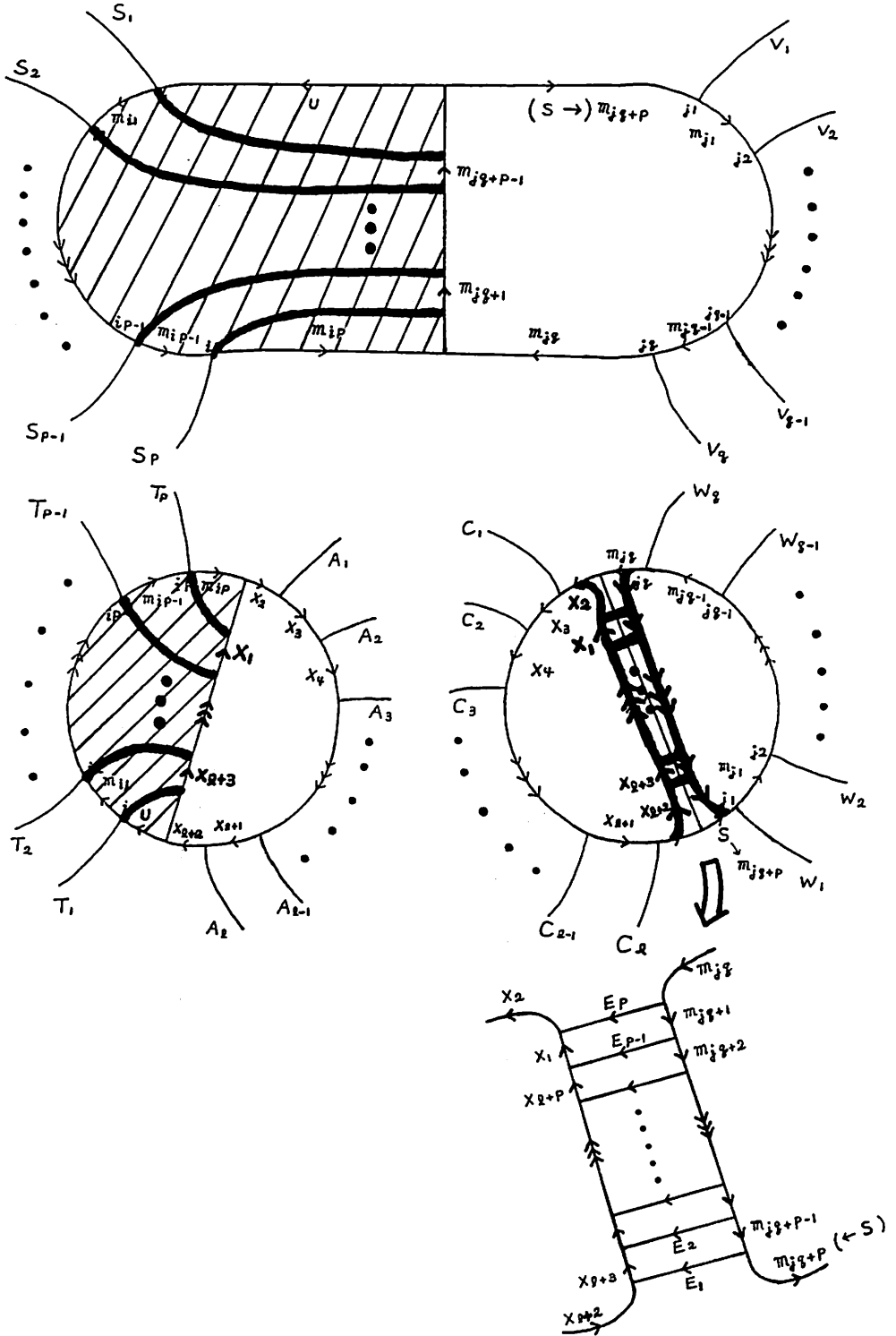
(7 - B)



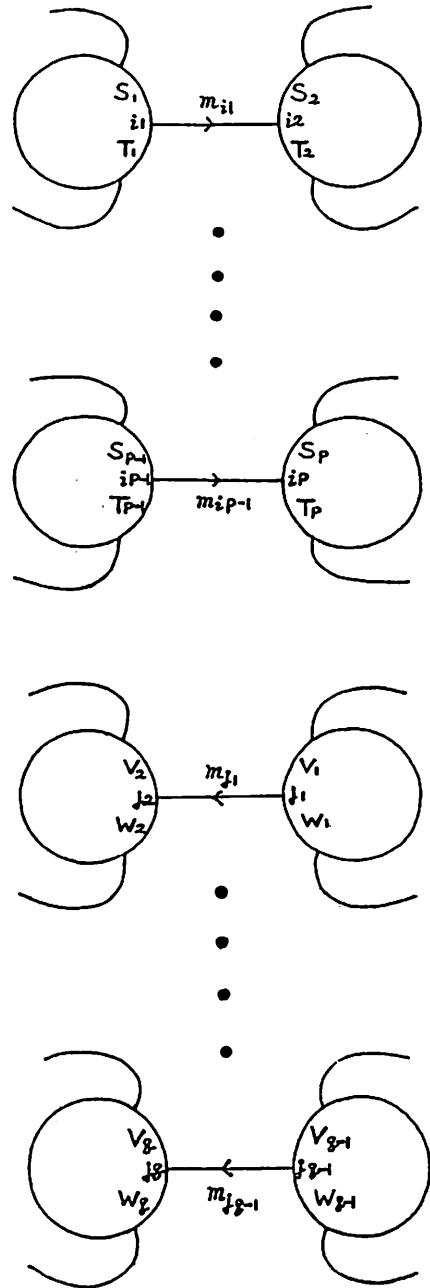
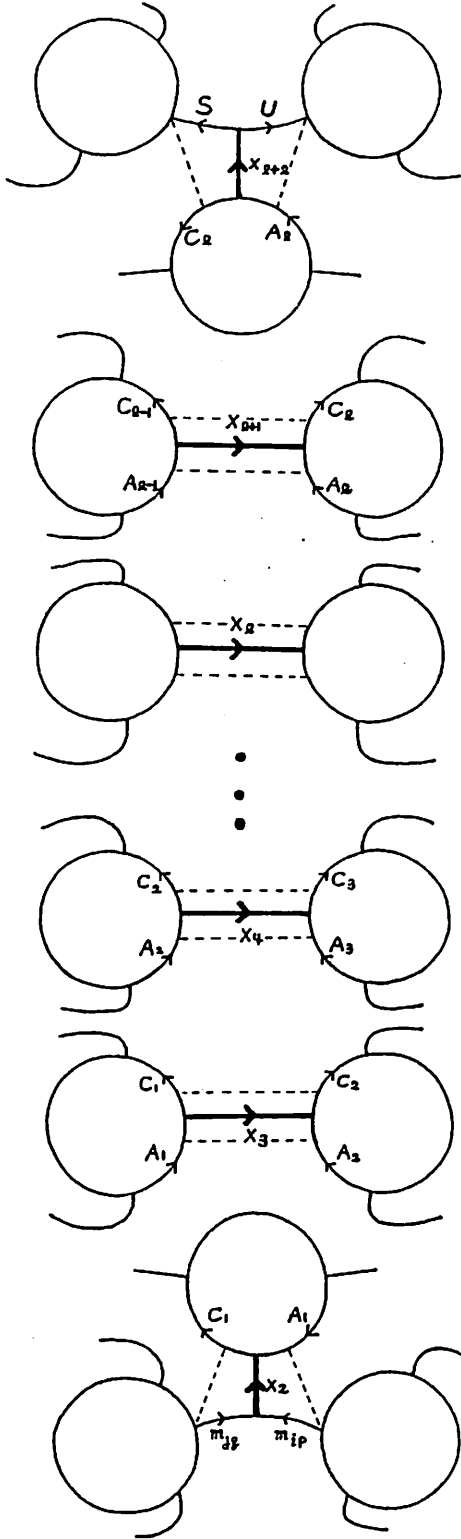
(1 - A')



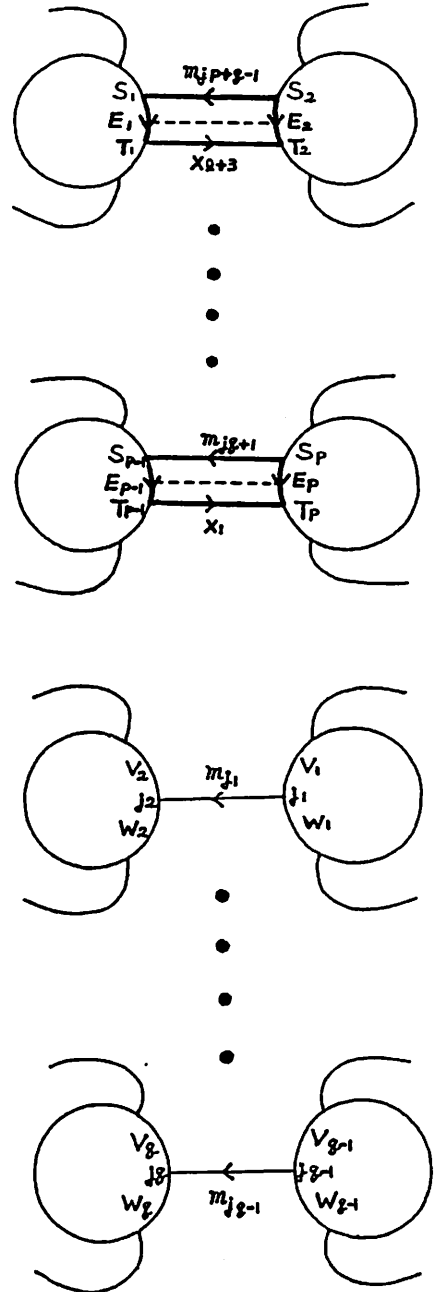
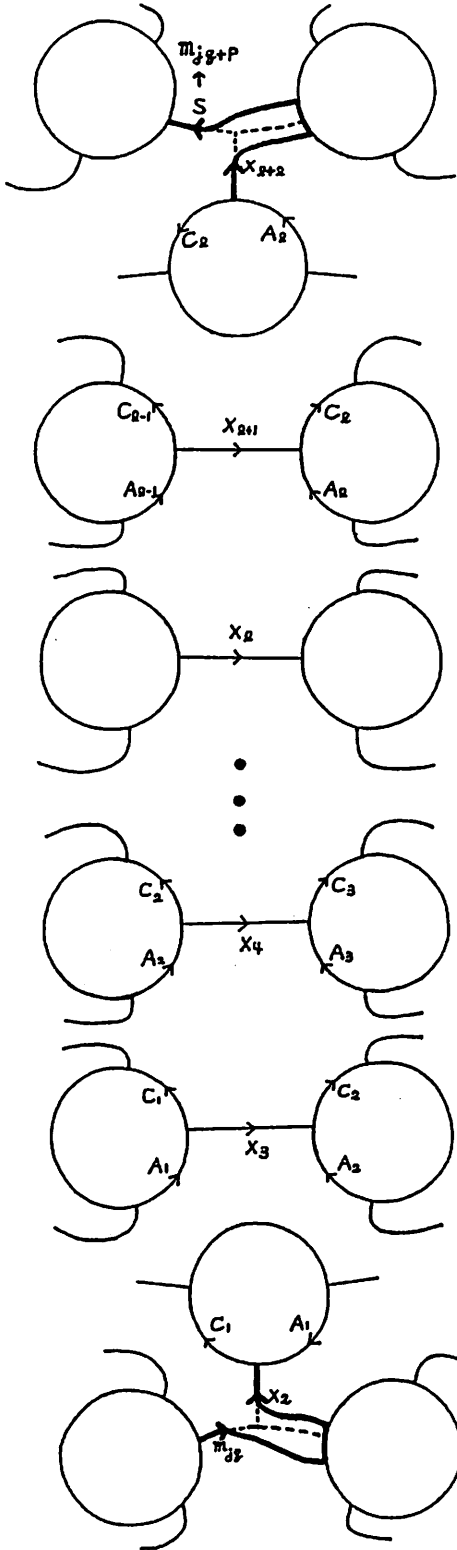
(1 - A'')



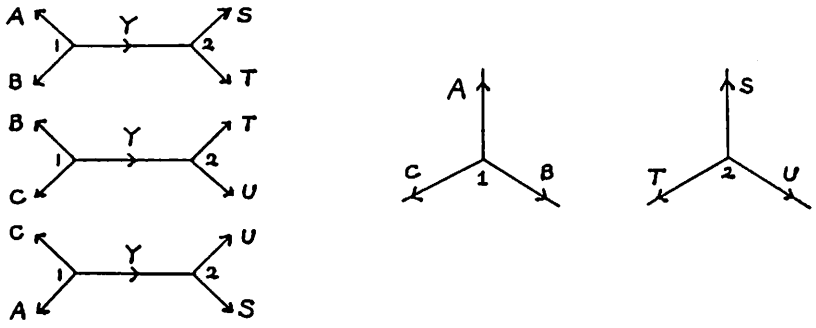
(2 - A')



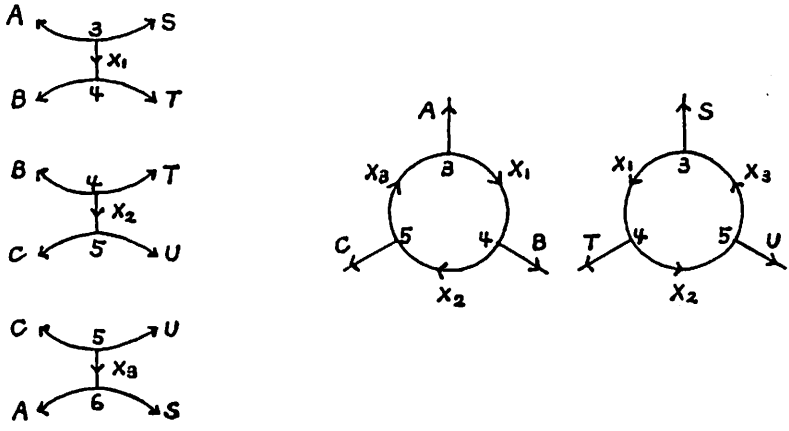
(2 - A ' ')



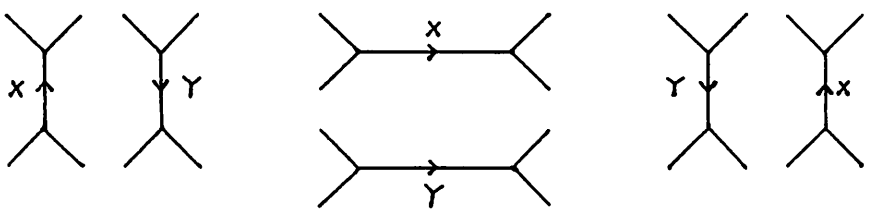
(G-1)



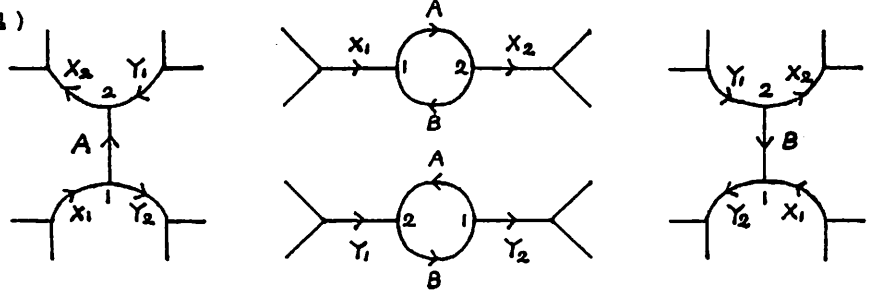
(G-2)



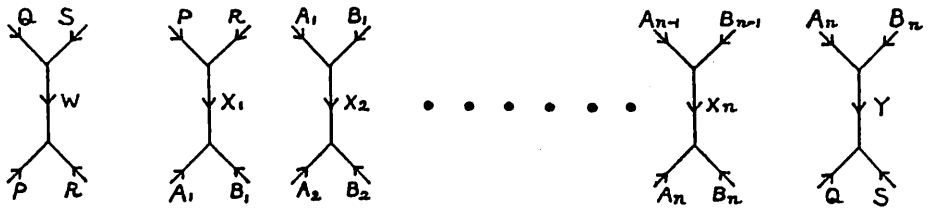
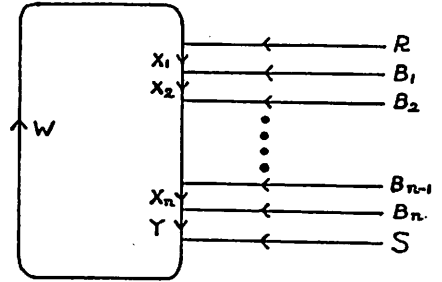
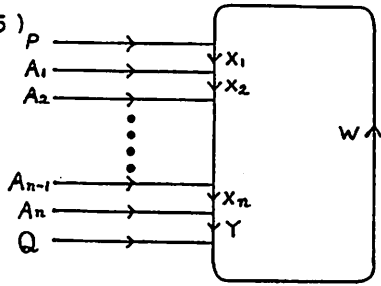
(G-3)



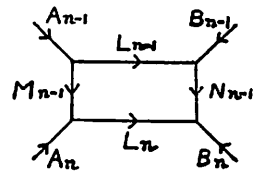
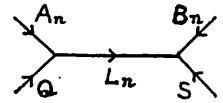
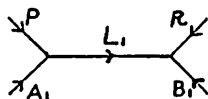
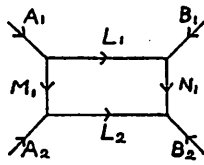
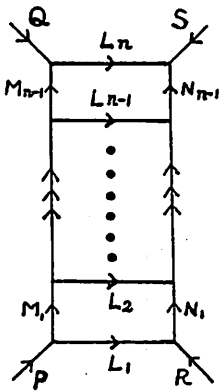
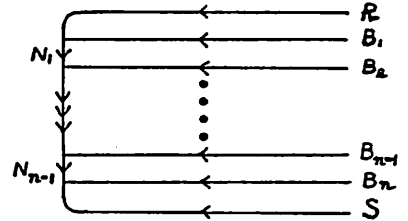
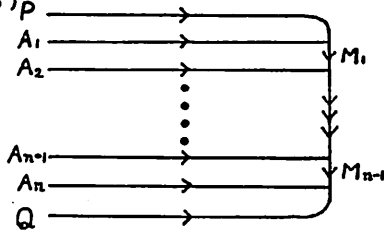
(G-4)



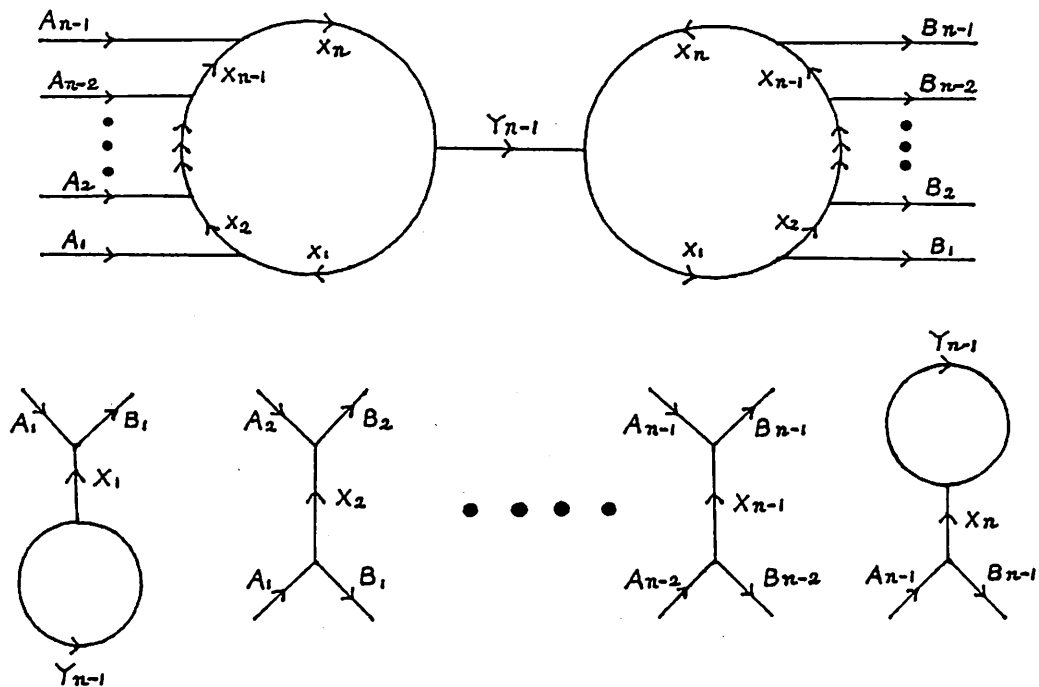
(G-5)



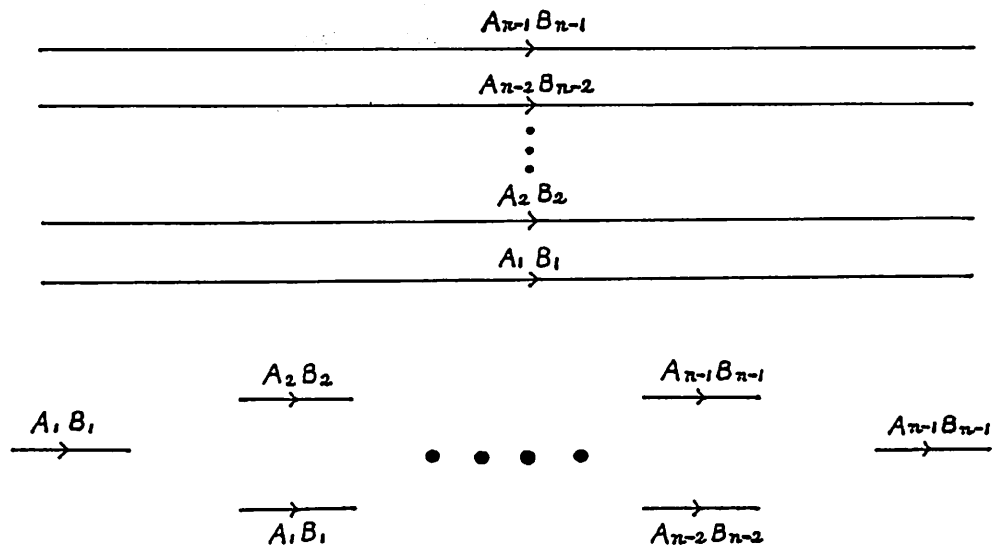
(G-6)



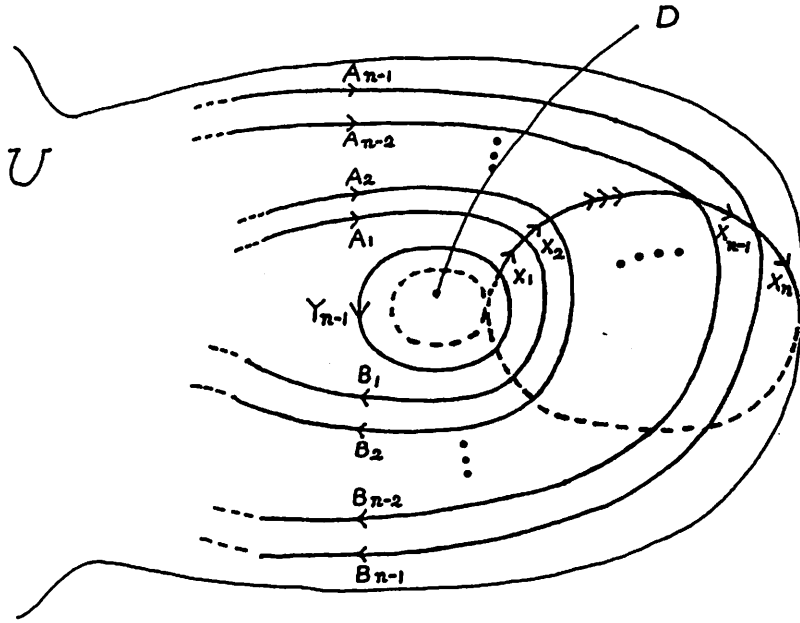
(G-7)



(G-8)



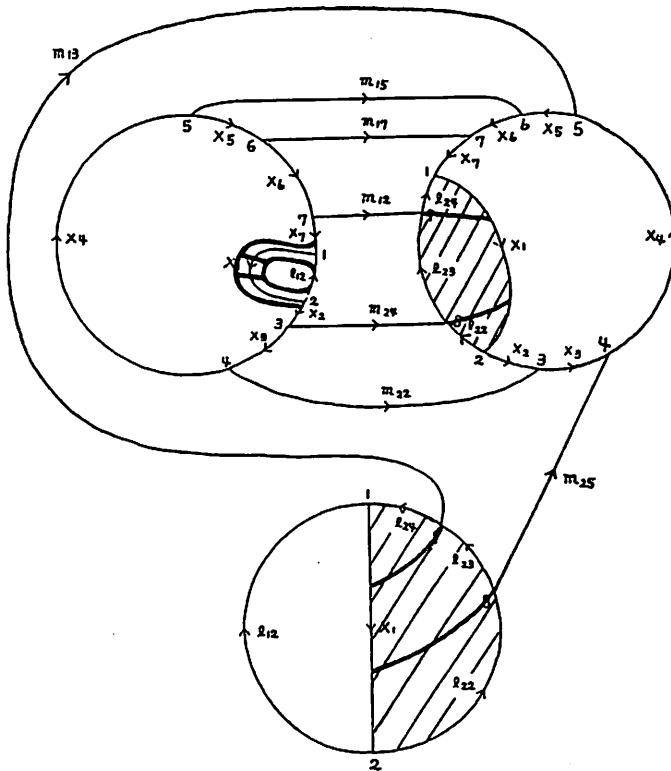
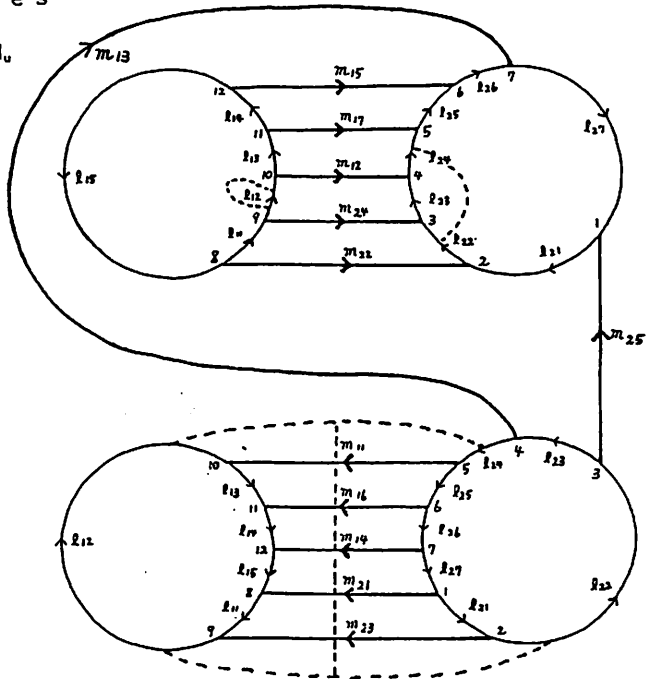
(3 - C)

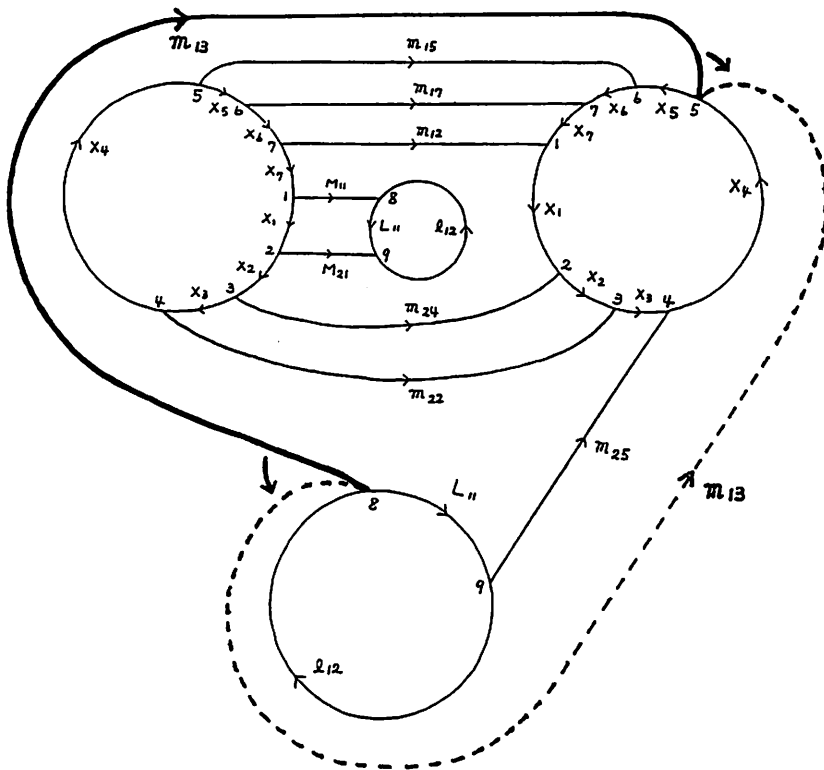


§ 4. Examples

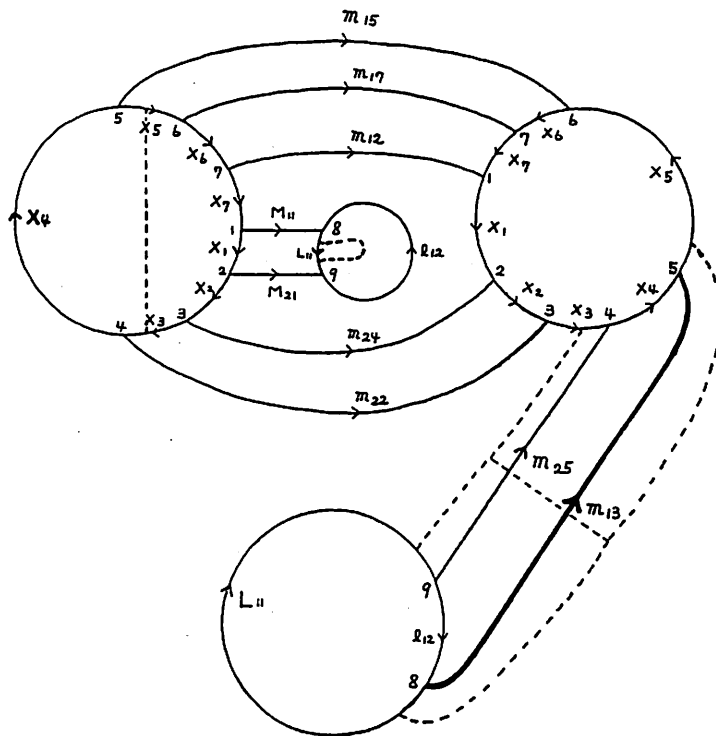
例1 図2の S^3 の H_*

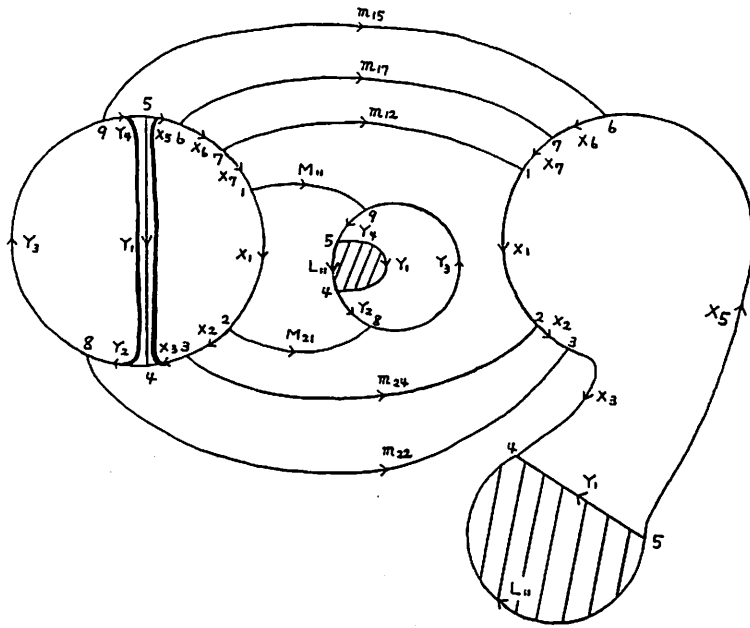
1



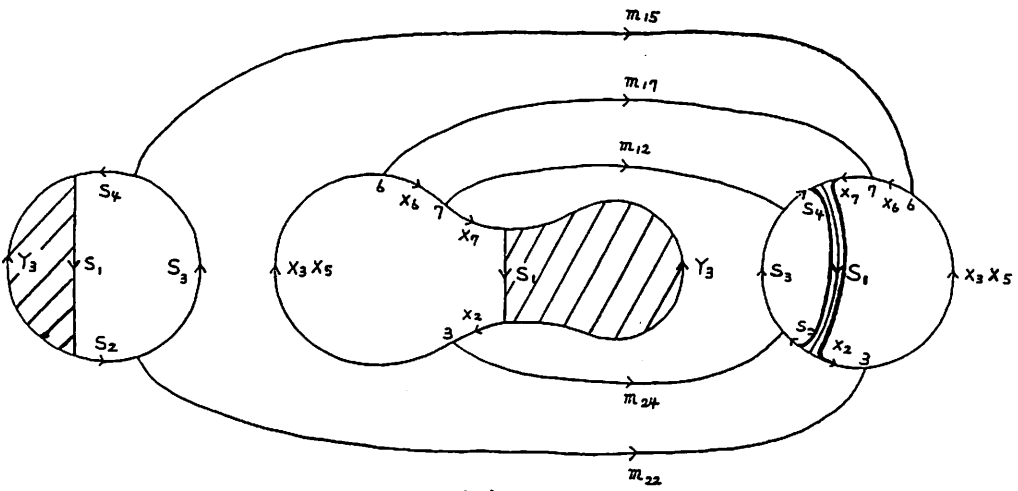
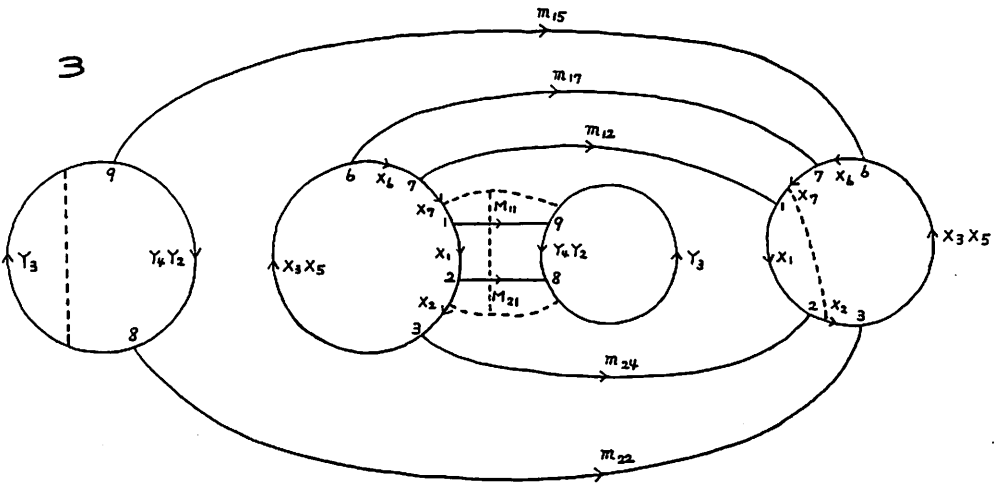


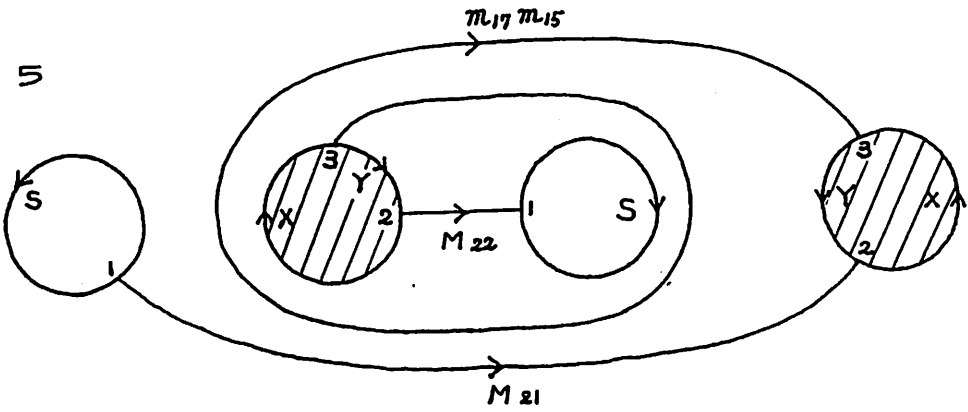
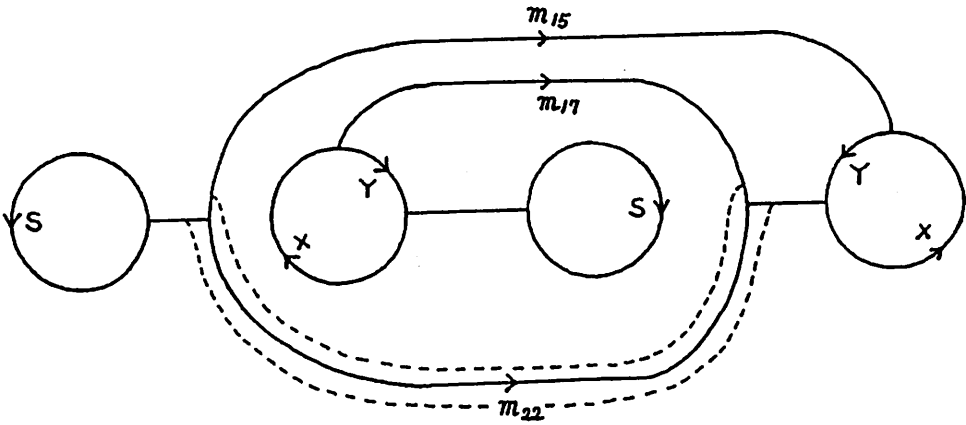
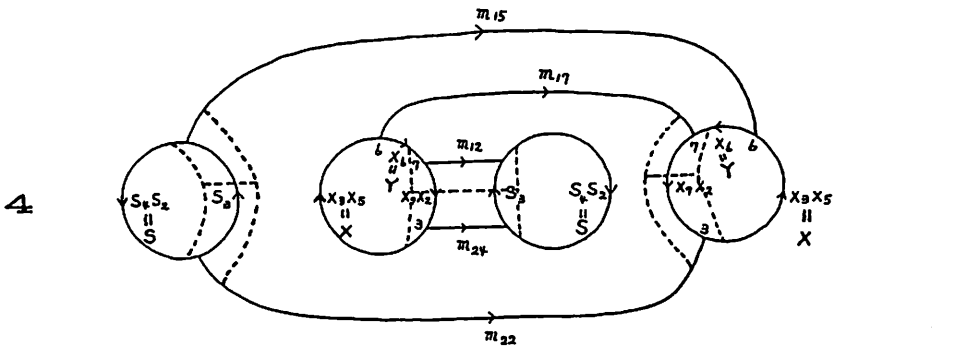
2



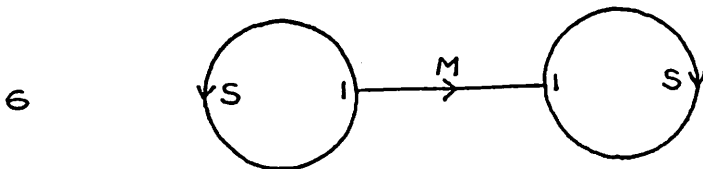


3



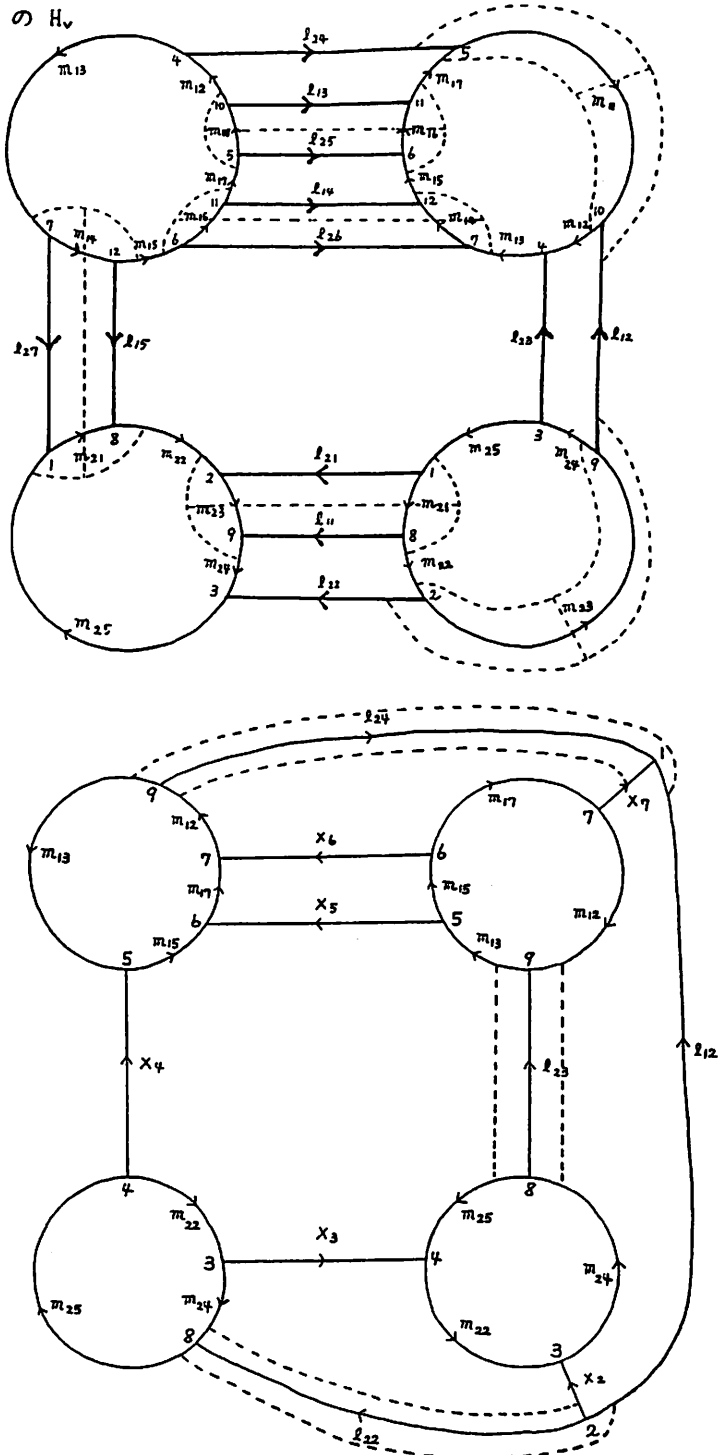


genus 1 Heegaard diagram

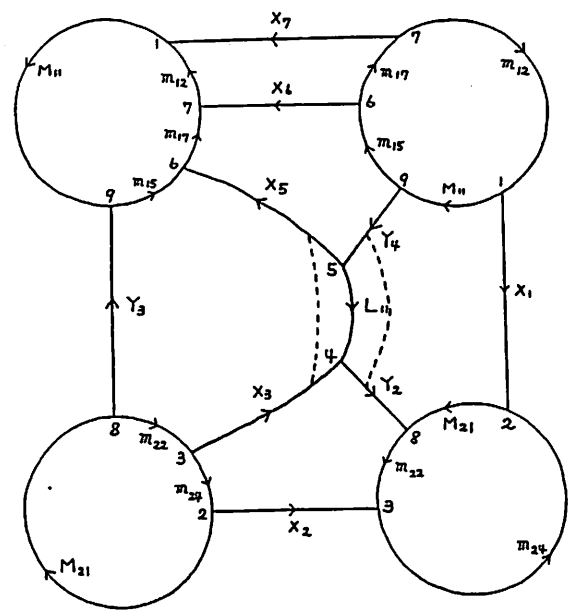
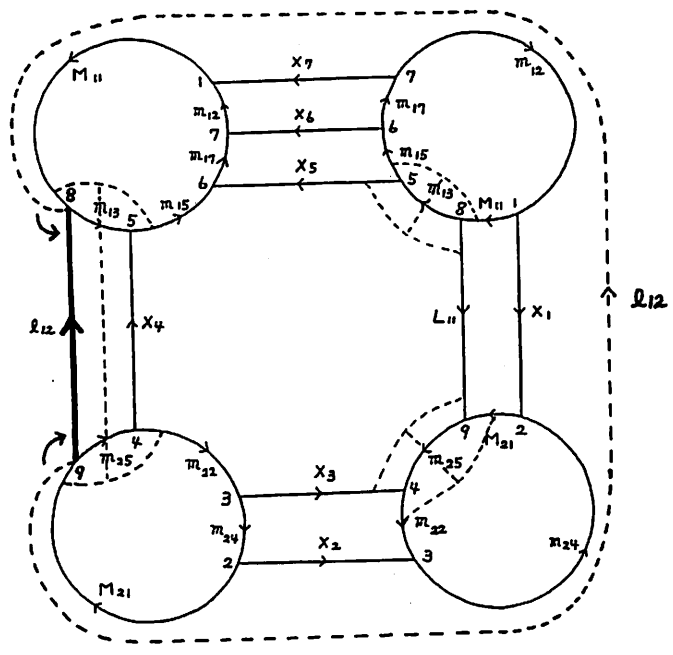


例2 図2の S^3 の H_*

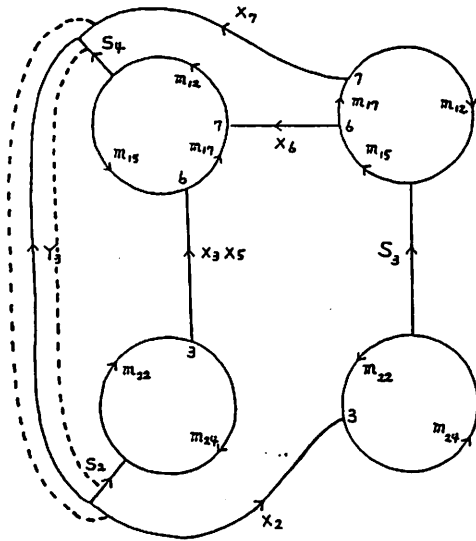
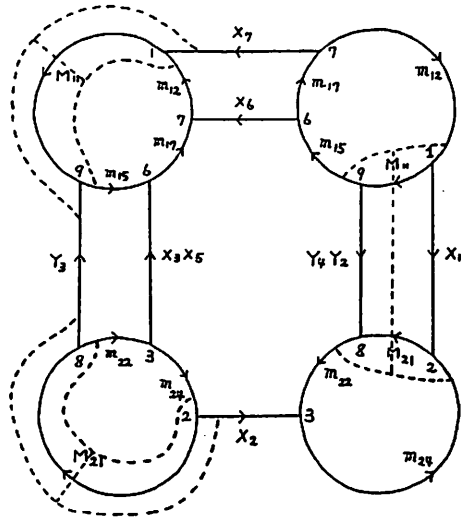
1



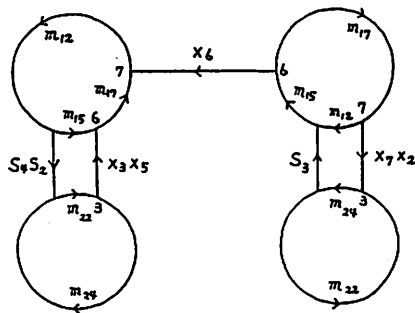
2



3



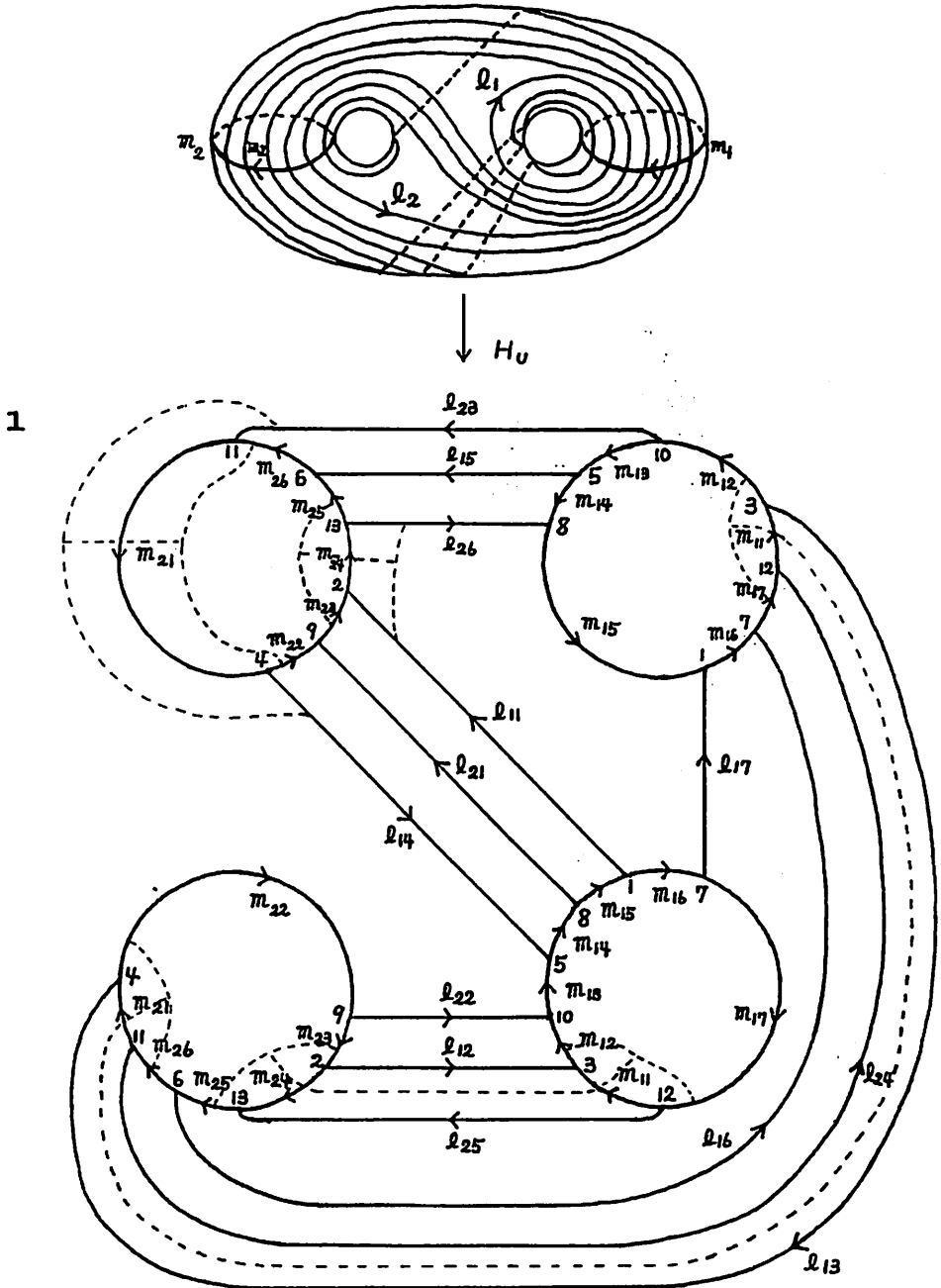
4

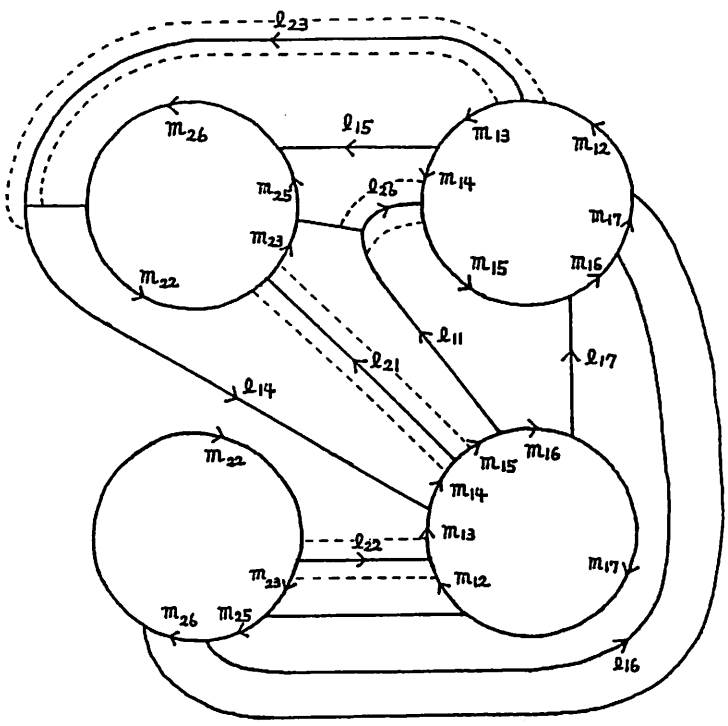


例3 正12面体空間 π の基本群

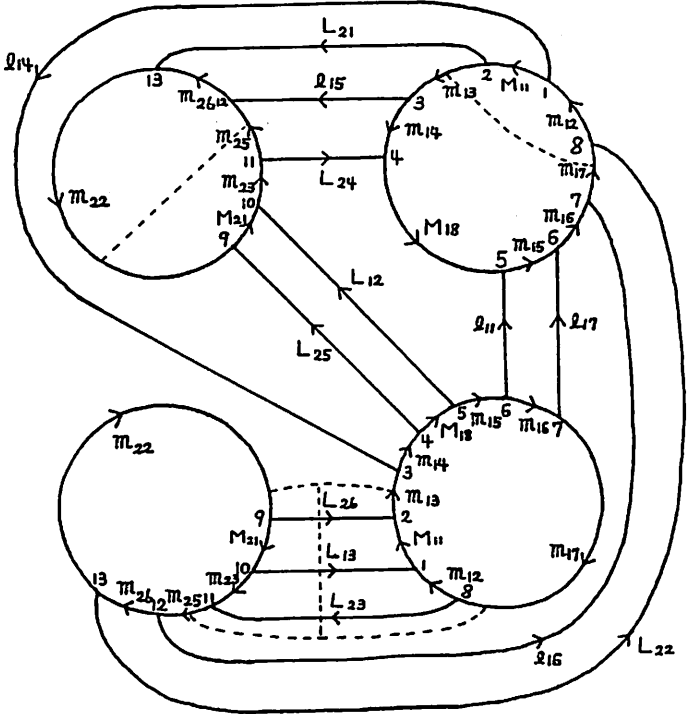
$$\pi_1(\pi) = \langle m_1, m_2 \mid m_1 m_2 m_1^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_2 m_1 = 1, m_1 m_2 m_1^{-1} m_2 m_1 m_2^{-1} = 1 \rangle$$

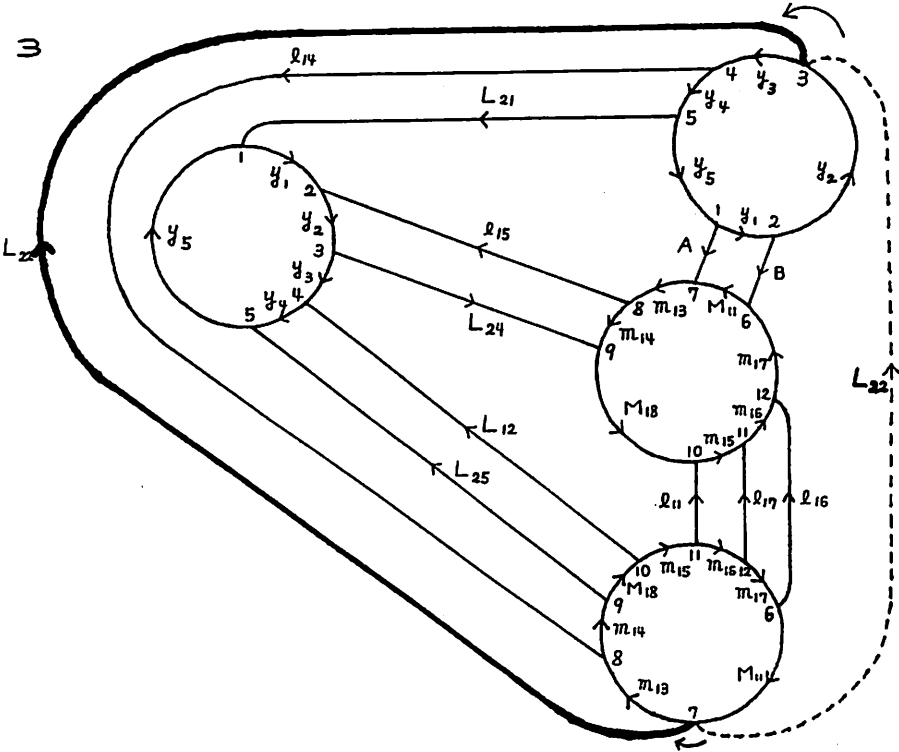
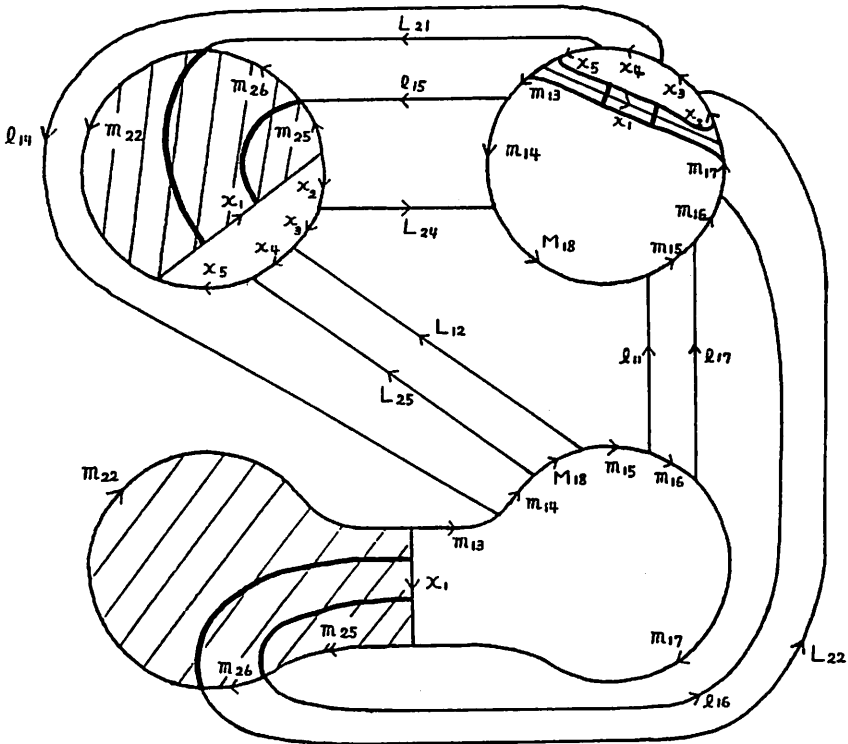
から得られる Heegaard diagram



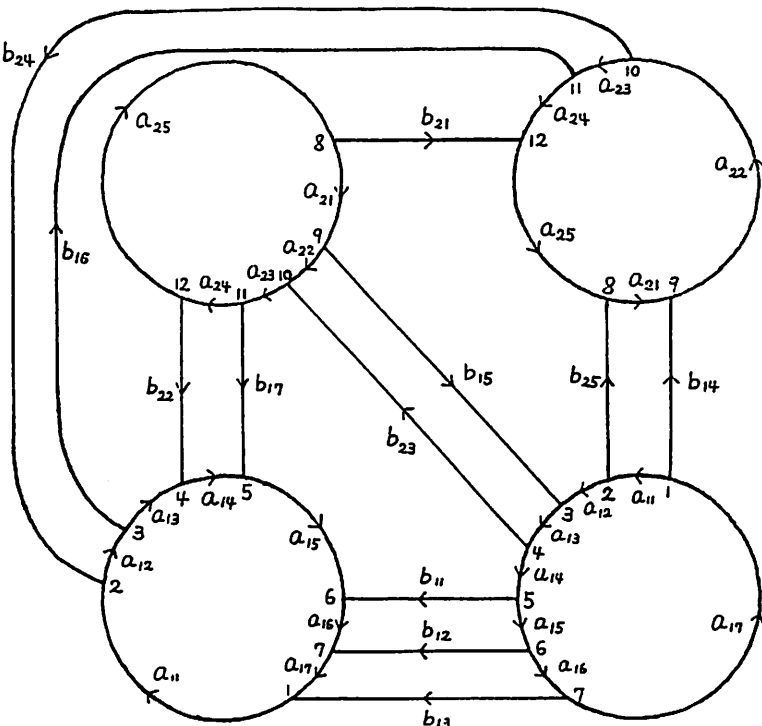


2

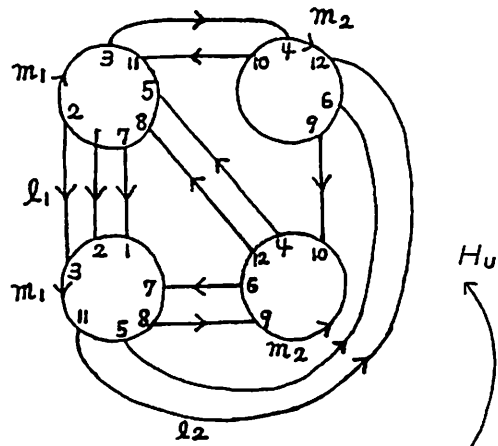




書き直して
新しいラベル
をつける



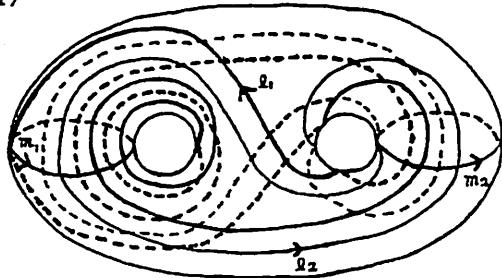
↕ 裏返し



H. Poincaré の構成した
正 1 2 面体空間 π

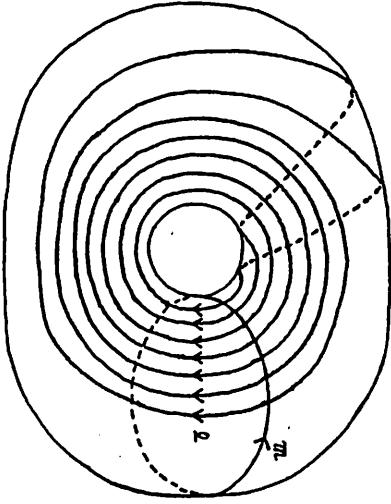
基本群 $\pi_1(\pi)$

$$= \langle m_1, m_2 \mid m_1^{-1} m_2^{-1} m_1^2 m_2^{-1} = 1, \\ m_1^{-1} m_2^2 m_1^{-1} m_2^{-1} = 1 \rangle$$



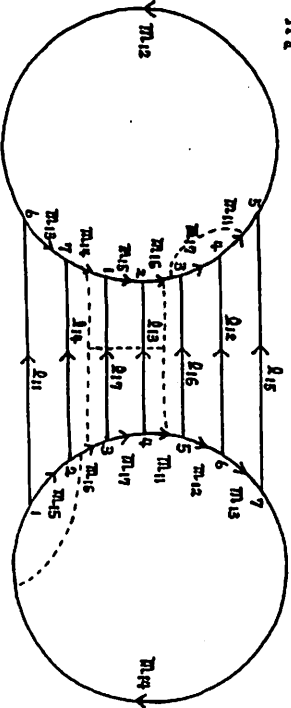
例 4 L(7, 2) と L(7, 4)

L(7, 2)

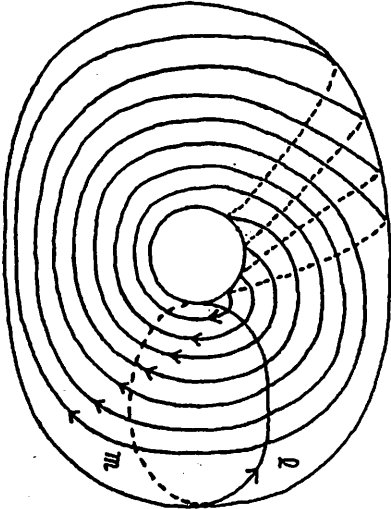


1

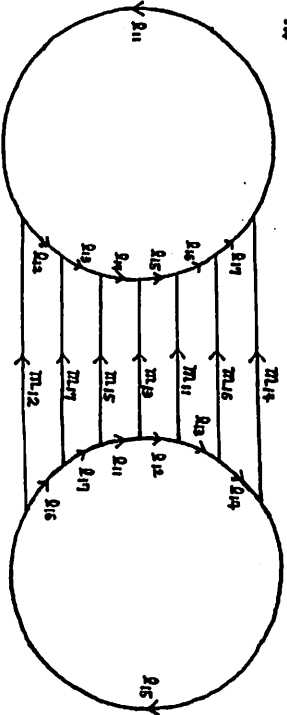
H_a

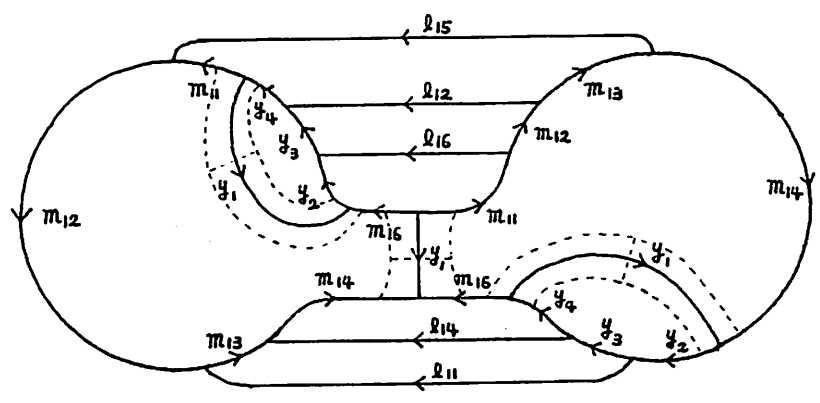


L(7, 4)

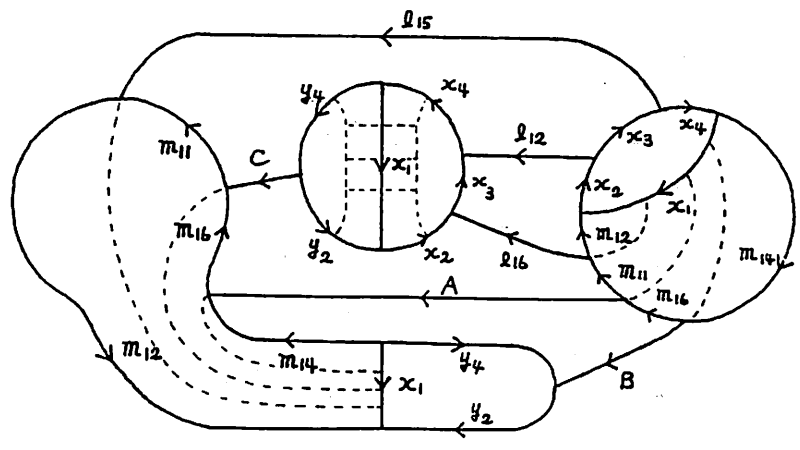
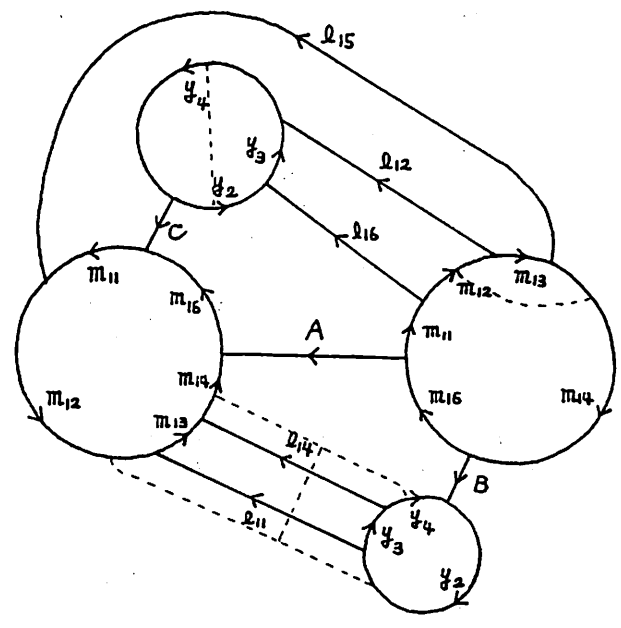


H_b

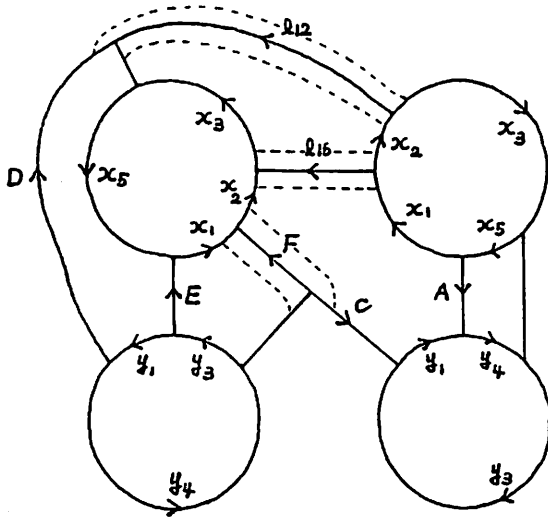
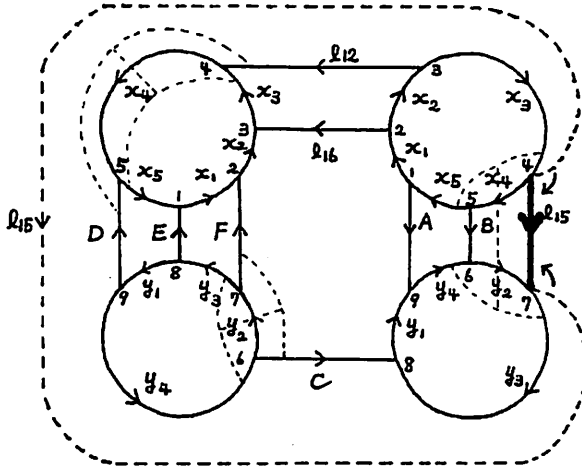




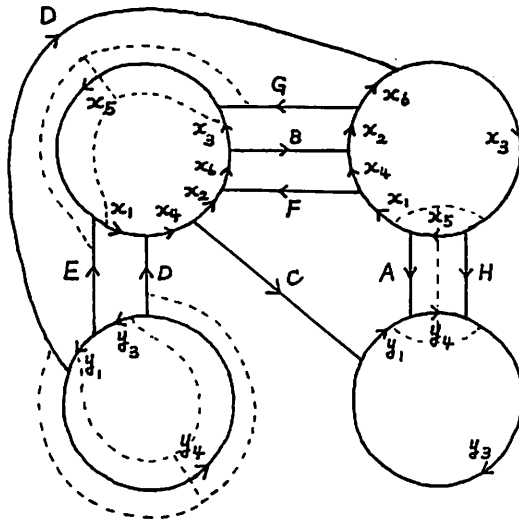
2

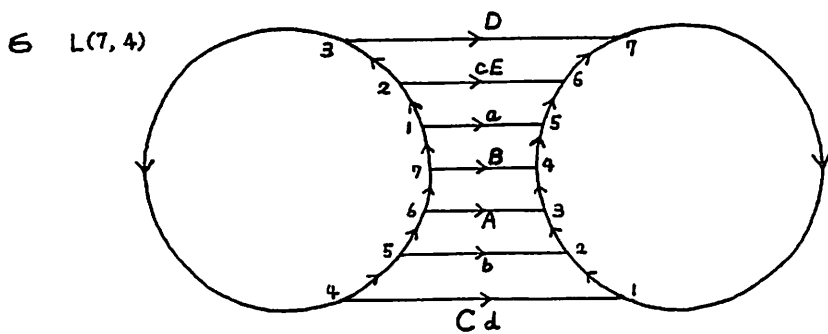
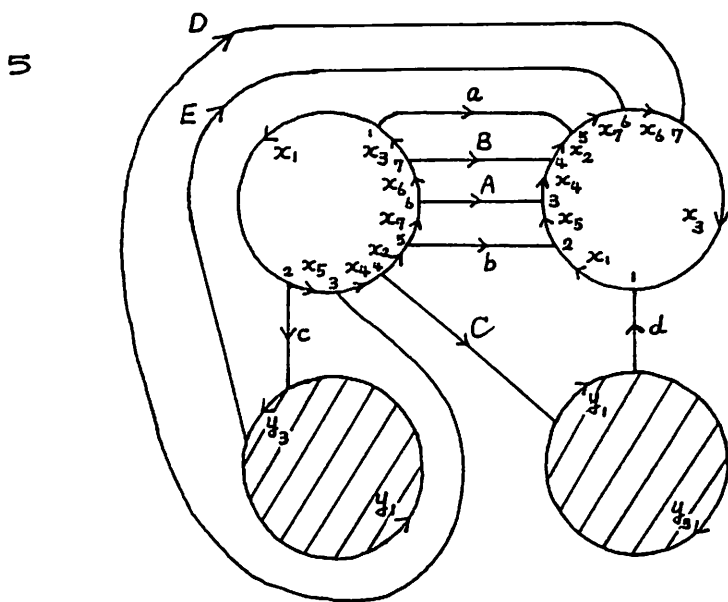
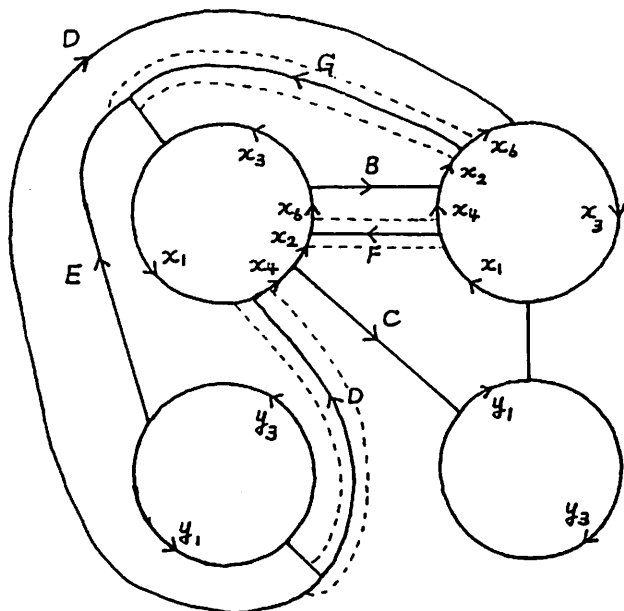


3

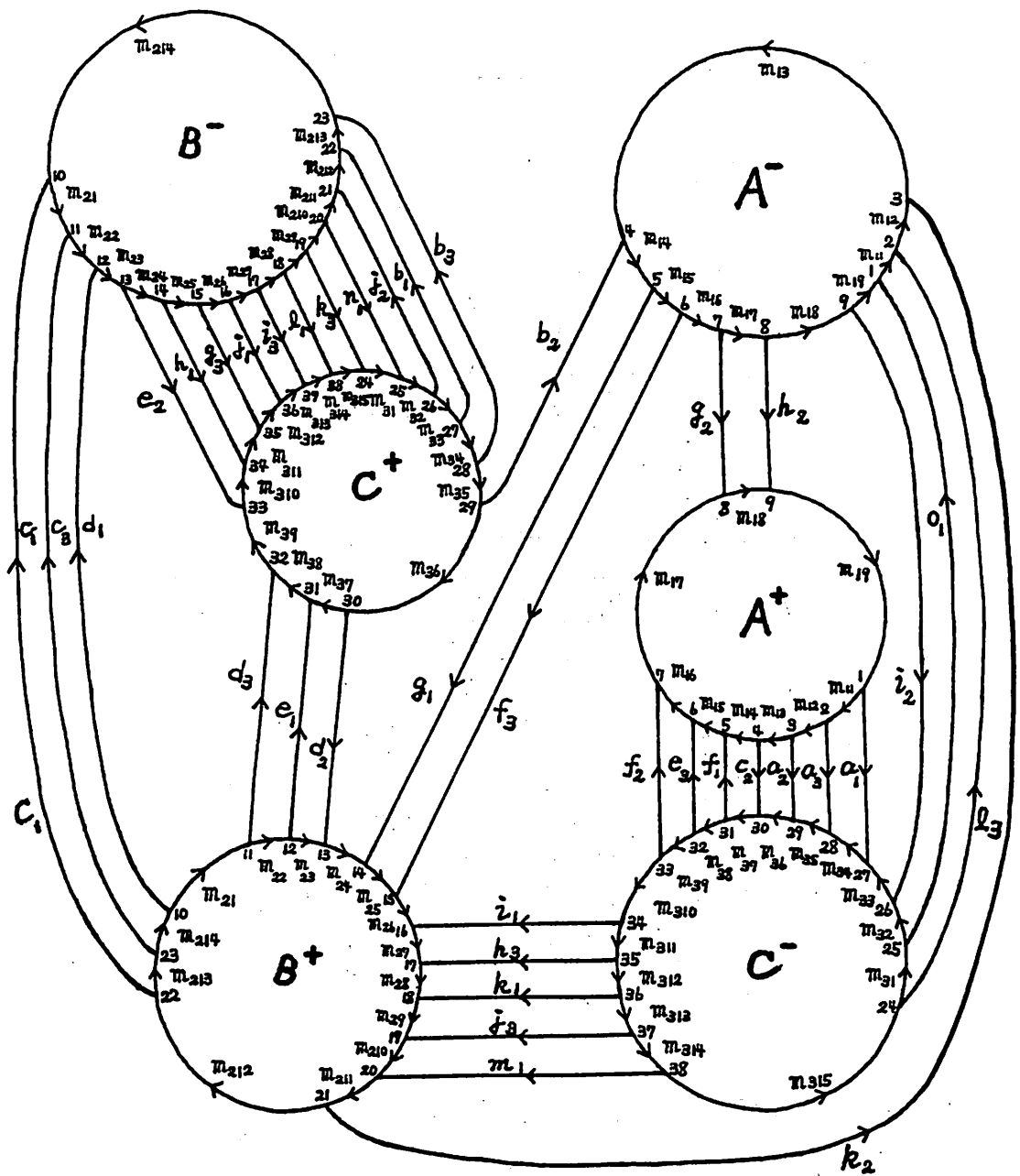


4





例5 Waveを持たない S^3 の Heegaard diagram の H_1 . [12]



longitude $L_1 = a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 g_1 h_1 i_1 j_1 k_1 l_1 m_1 n_1 o_1$
 $L_2 = a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2 g_2 h_2 i_2 j_2 k_2$
 $L_3 = a_3 b_3 c_3 d_3 e_3 f_3 g_3 h_3 i_3 j_3 k_3 l_3$

References

- [1] Ikeda, H & Inoue, Y , INVITATION TO DS-DIAGRAMS, KOBE J. MATH. 2(1985) 169-186
- [2] 山下正勝 , D-変形について II, 数理科学講究録 575(1985)28-41.
- [3] 山下正勝, 横山和夫 , D-変形の実践 - 池田-石井 の Examples について -, 箱根セミナー記録 '85(1985), 61-104.
- [4] 山下正勝 , DS-diagramの初等変形とは , 箱根セミナー記録 '86(1986), 13-34.
- [5] 山下正勝 , DS-diagramとHeegaard diagram , 数理科学講究録 636(1987) 91-107.
- [6] Yamashita, M , D_1 -deformation of DS-diagram , Research Rep. of Gen. Ed. Fac. of Eng. Toyo Univ. , No.22(1987) , 49-55.
- [7] Ikeda, H & Yamashita, M & Yokoyama, K , Deformations of DS-diagrams , Topology and Computer Science (1987) , 81-138.
- [8] 堀口俊二 , S^3 と正12面体空間の初等変形 , 箱根セミナー記録 '89(1989) , 29-45.
- [9] Hempel, J. , 3-manifolds , Ann. of Math. Studies 86 , Princeton Univ. Press (1976)
- [10] 本間龍雄 , ホアンカレ予想物語 13 , 日本評論社(1985)
- [11] 本間龍雄 , 組合せ位相幾何学, 共立全書 231, 1980
- [12] 落合豊行 , コンピュータによる3次元多様体の構成とグラフィックスによる処理, 数理科学10(1984), 22-29
- [13] 金戸武司 , Invariants of Heegaard splittings, 箱根セミナー記録 '88(1988), 1-11.