

S³と正12面体空間の初等変形

堀口 俊二 (日大理工)

S³と正12面体空間 π について、§1ではこれらの Heegaard diagrams から得られる DS-diagramsの初等変形の例を与える。§2ではこれらの Heegaard diagramsの初等変形の例を与える。§3ではwaveの存在しないS³のgenus 3の Heegaard diagramの初等変形の例を与える。なお本稿では、§2の例3, 例4, 例6については各段階の初等変形の過程の図を与え、その他の例については、初等変形の最終結果のみを報告します。

§1. Heegaard diagramsから得られるDS-diagramの初等変形の例

Heegaard splitting $M=H_1 \cup H_2$ (M :連結閉3-多様体 (orientable or nonorientable) H_1, H_2 :種数の等しいhandlebodies, $H_1 \cap H_2 = \partial H_1 \cap \partial H_2$) に associate された Heegaard diagram [5] の対からDS-diagram を構成する方法が [1] により与えられた。そこで実際以下の図1から図6までのS³のHeegaard diagrams 6例からDS-diagrams を構成して、各DS-diagramsに連結を保つようにして初等変形 [2] を実行すると、すべての例についてS³のDS-diagramsのうち最も単純な「アワビ」(図9)に到達する。また正12面体空間 π についても、図7と図8のgenus 2の Heegaard diagrams 2例からDS-diagramsを構成して、各DS-diagramsに連結を保つようにして初等変形を実行すると、2例とも図10に到達する。これは π を表すよく知られたdiagramである。

§2. Heegaard diagramsの初等変形の例

Heegaard splitting に associate されたHeegaard diagramの対は非連結なDS-diagramそのものである。従ってHeegaard diagramの対にもDS-diagramの初等変形が適用できる。そこでS³の標準形以外の例3から例6までと π の例1について、各連結成分に対しては連結を保つようにして初等変形を実行すると、S³の場合は、4例ともすべて図1のS³のgenus 1のHeegaard diagramの対を得る。 π については例1は図11を得る。この図はもはや Heegaard diagramの対ではない。 π の例2についても図11が得られるであろう。

例3, 例4, 例6について, それらの初等変形を与える:

S^3 の例3の図3のHeegaard diagramの対の初等変形

例3の図3のHeegaard diagramの対の2辺形 m_{11}, m_{12} をつぶす初等変形を行うと図1のgenus 1のHeegaard diagramの対を得る.

S^3 の例4の図4のHeegaard diagramの対の初等変形

以下2つの初等変形AとBを与える:

初等変形A

step 1 例4の図4のHeegaard diagramの対の3辺形 m_{11}, m_{12}, m_{13} をつぶすと図12を得る.

step 2 図12において, 3辺形 $m_{23}, l_{13}, l_{22}^{-1}$ をつぶすと図13を得る.

step 3 図13において, 2辺形 l_{21}, D^{-1} をつぶすと図1のgenus 1のHeegaard diagramの対を得る.

初等変形B

step 1 例4の図4のHeegaard diagramの対の2辺形 $(m_{21}, m_{22}), m_{23}$ をつぶすと図14を得る.

step 2 図14の2辺形 $(l_{12}, l_{21}^{-1}), m_{12}^{-1}$ をつぶすと図1のgenus 1のHeegaard diagramの対を得る.

S^3 の例6の図6のHeegaard diagramの対の初等変形

step 1 例6の図6のHeegaard diagramの対の3辺形 m_{21}, m_{22}, m_{23} をつぶすと図15を得る.

step 2 図15の3辺形 $m_{11}, l_{21}, l_{11}^{-1}$ をつぶすと図16を得る.

step 3 図16の2辺形 m_{12}, l_{13} をつぶすと図17を得る.

step 4 図17の2辺形 m_{14}, M をつぶすと図18を得る.

step 5 図18の辺Dに着目して, 3辺形をつぶす逆操作を行うと図19を得る. これは図14と同型な非連結なDS-diagramである.

step 6 図19の2辺形PWをつぶすと図1のgenus 1のHeegaard diagramの対を得る.

S 3. waveを持たない S^3 のHeegaard diagramの初等変形の例

図20は [7] の裏表紙にあるコンピュータによるwaveを持たない S^3 のgenus3のHeegaard splittingにassociateされたHeegaard diagramであり, 図21はその対である. 図20+図21は非連結なDS-diagramであり, 各図20, 図21に連結を保つ初等変形を行うとgenus1の標準的なHeegaard diagramsの対を得る(図1). また図20, 図21に非連結となる初等変形を行うとgenus 2およびgenus3の標準的なHeegaard diagramsの対を得ることもできる.

例1 S^3 のgenus 1のHeegaard diagram

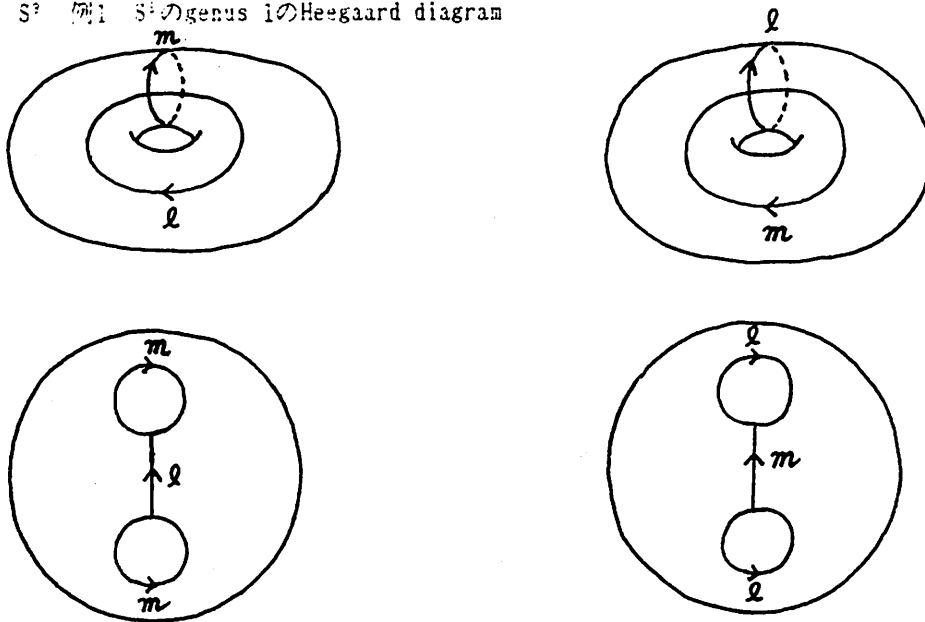


図1

例2 S^3 のgenus 2の標準的なHeegaard diagram

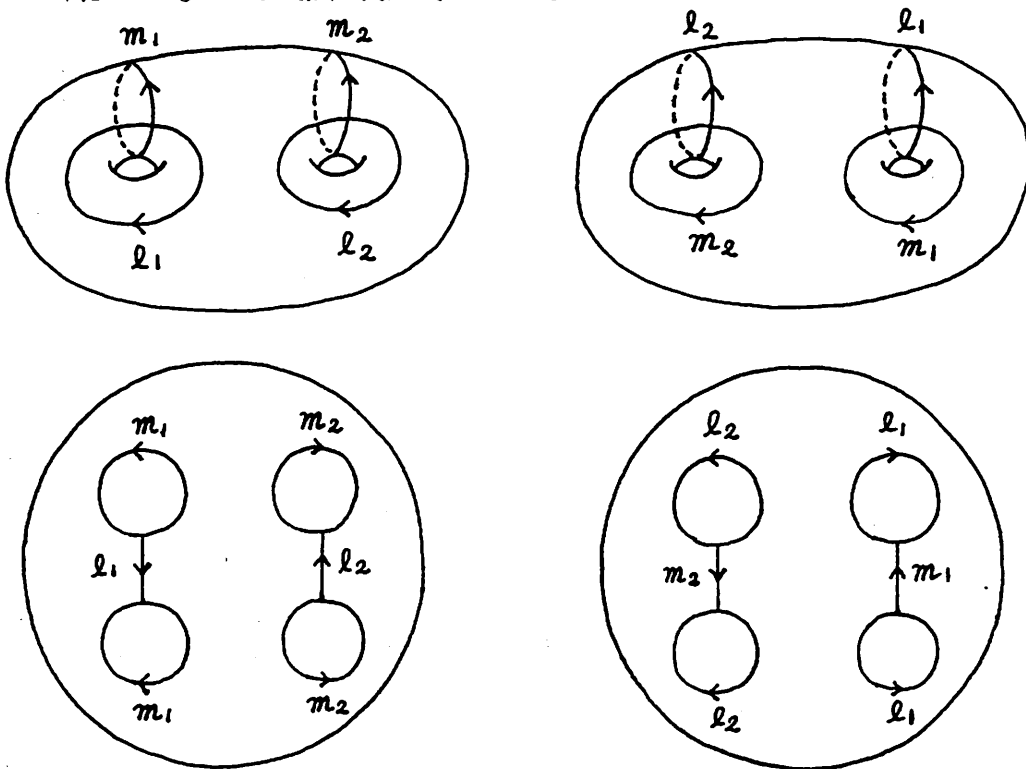


図2

(32)

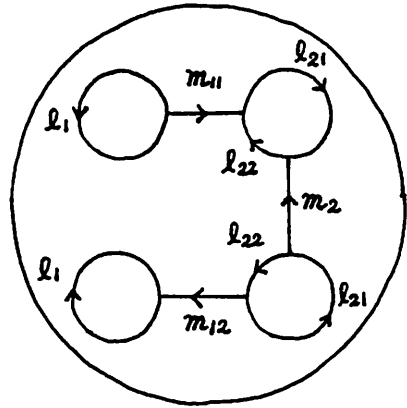
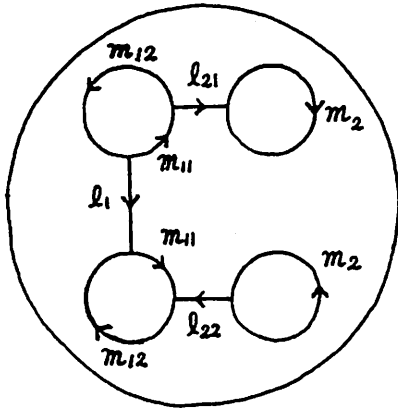
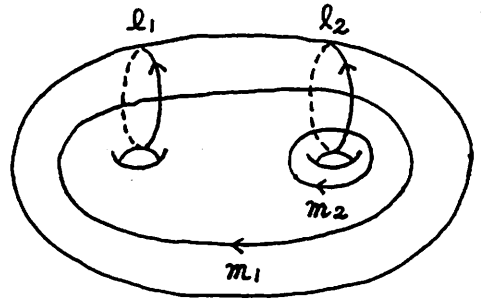
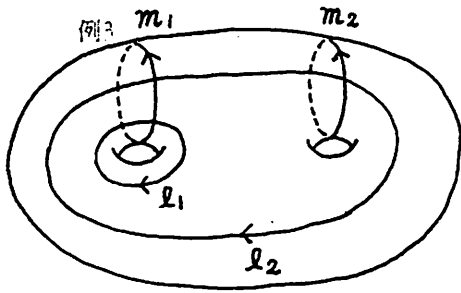


图 3

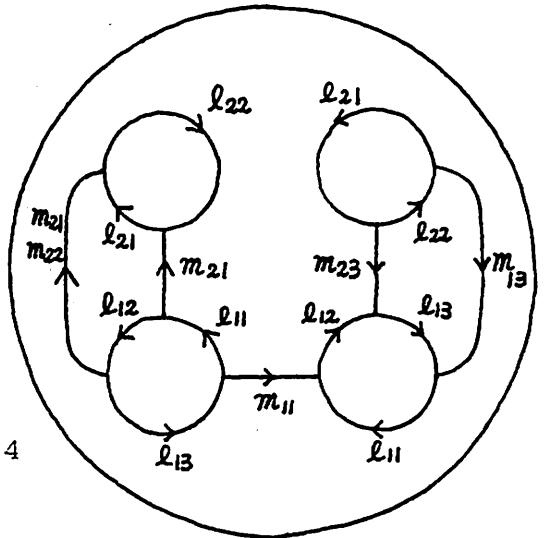
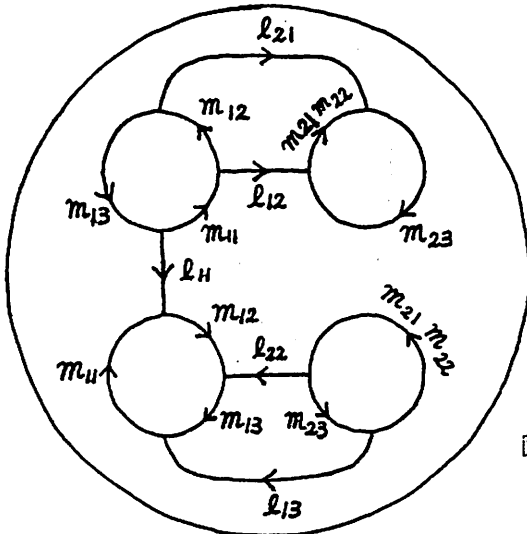
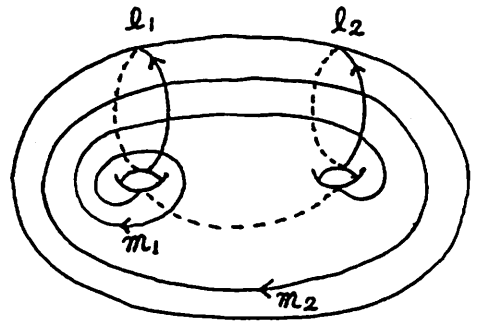
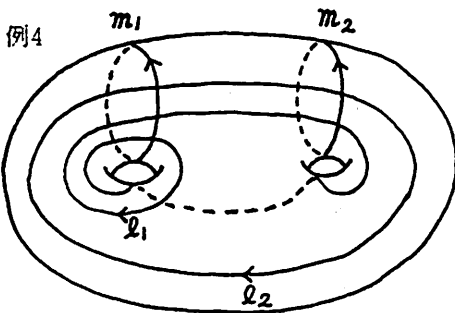
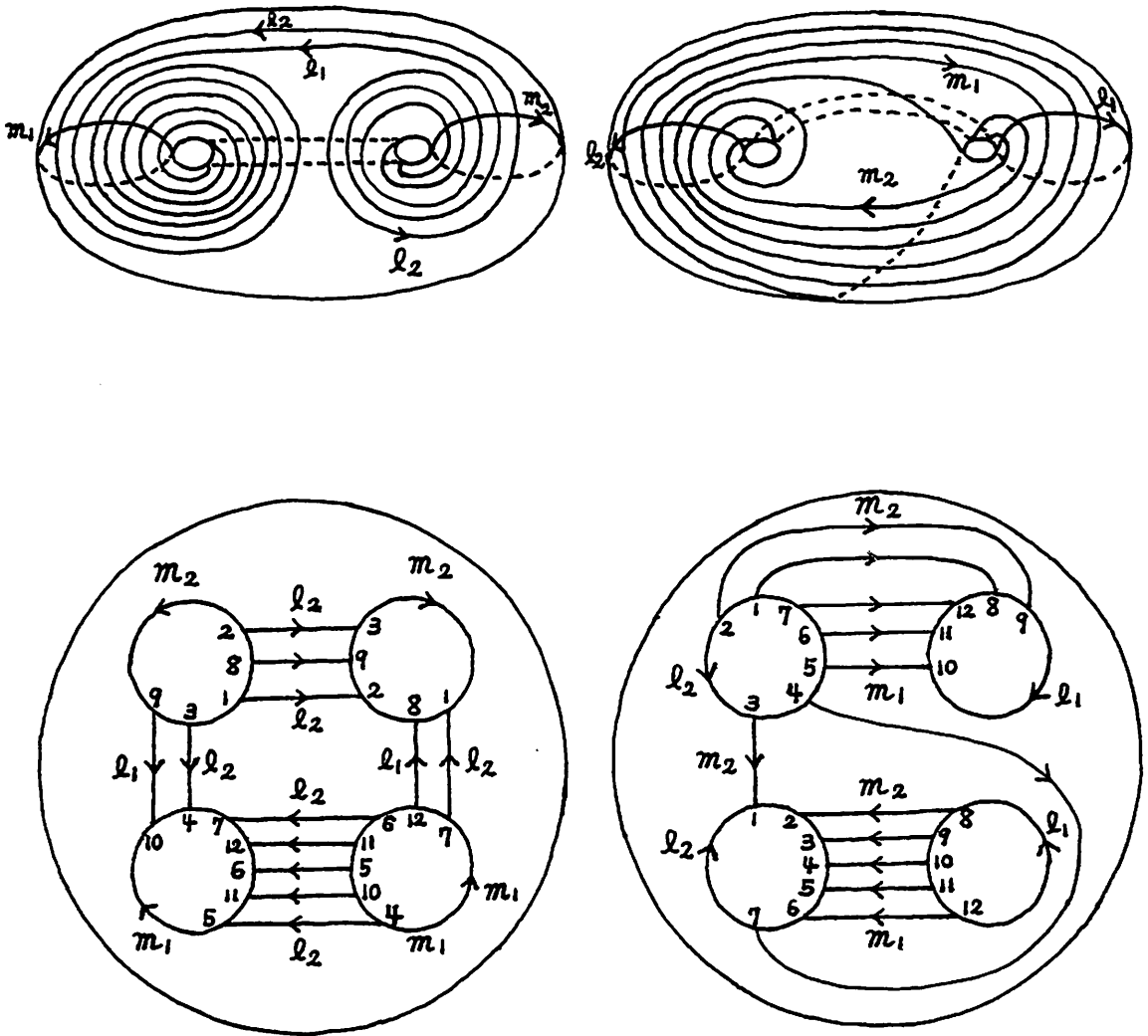


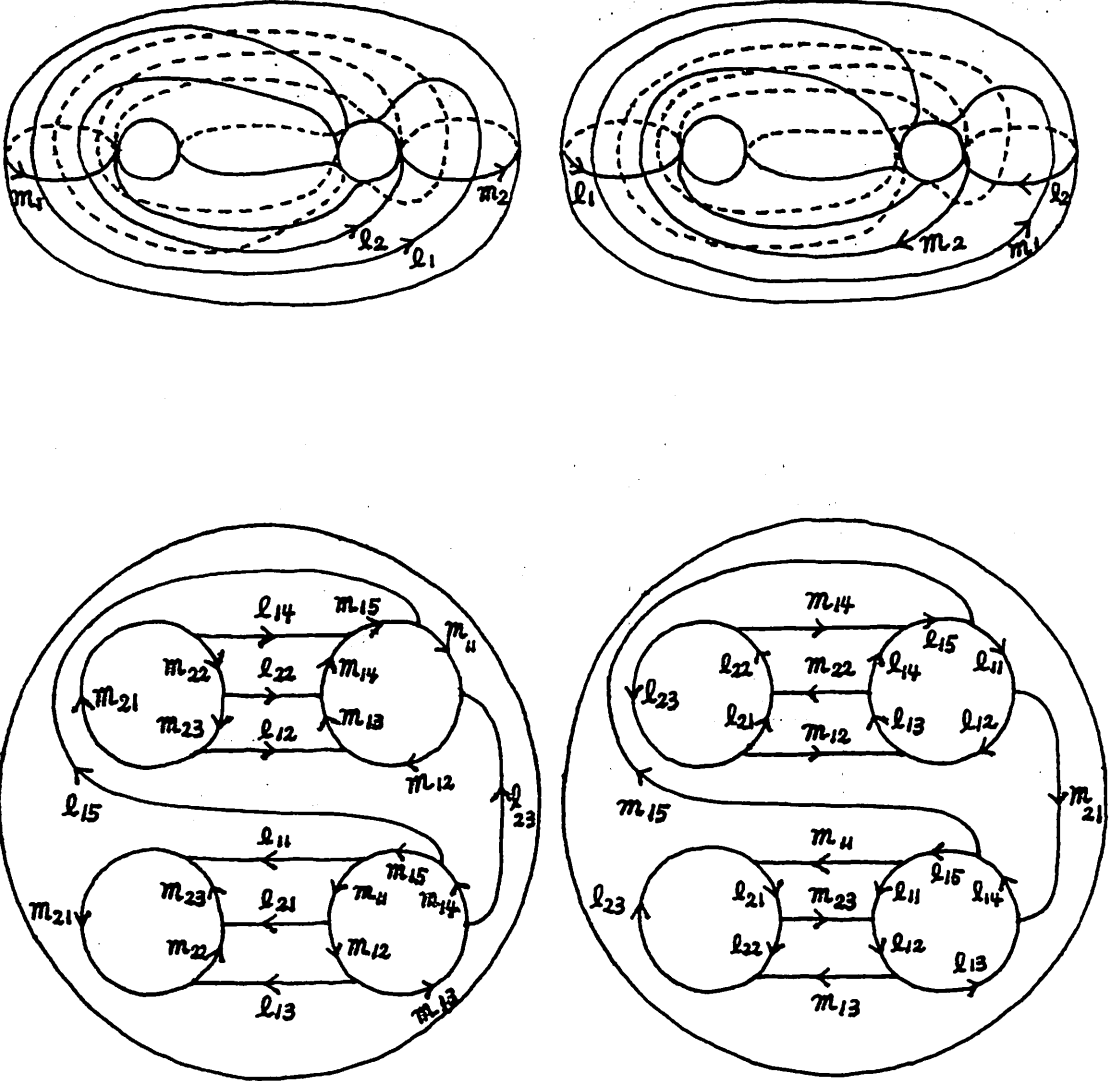
图 4

例5 [5] のP19のFig.1のHeegaard diagram



(34)

例6 [6] のP19の図0.7のHeegaard diagram



π 例1 [6] のP17の図0.6のHeegaard diagram

基本群 $\pi_1(\pi) = \langle m_1, m_2 \mid m_1^{-1}m_2^{-1}m_1^{-1}m_2^{-1} = 1, m_1^{-1}m_2^2m_1^{-1}m_2^{-1} = 1 \rangle$

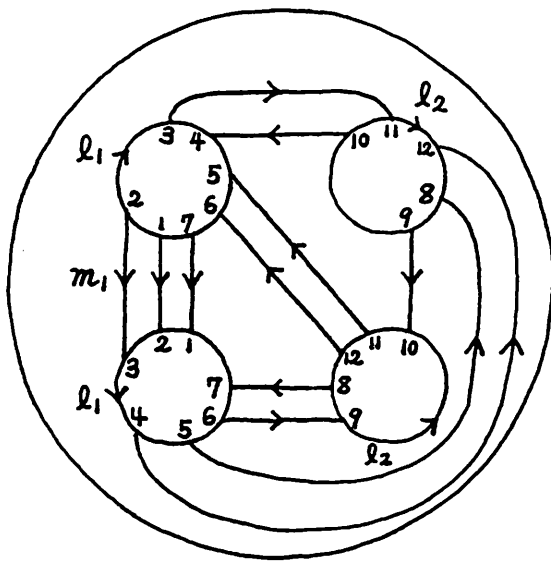
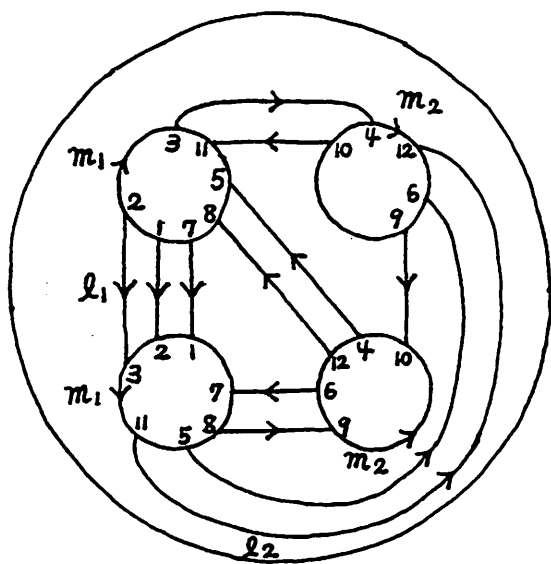
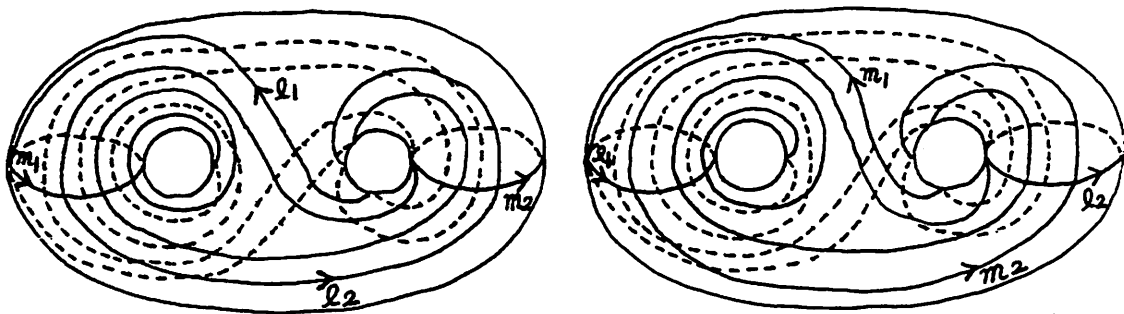


図 7

例2 正12面体空間 π の基本群

$$\pi_1(\pi) = \langle m_1, m_2, m_1 m_2 m_1^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_2 m_1 = 1, m_1 m_2 m_1^{-1} m_2 m_1 m_2^{-1} = 1 \rangle$$

から得られるHeegaard diagram

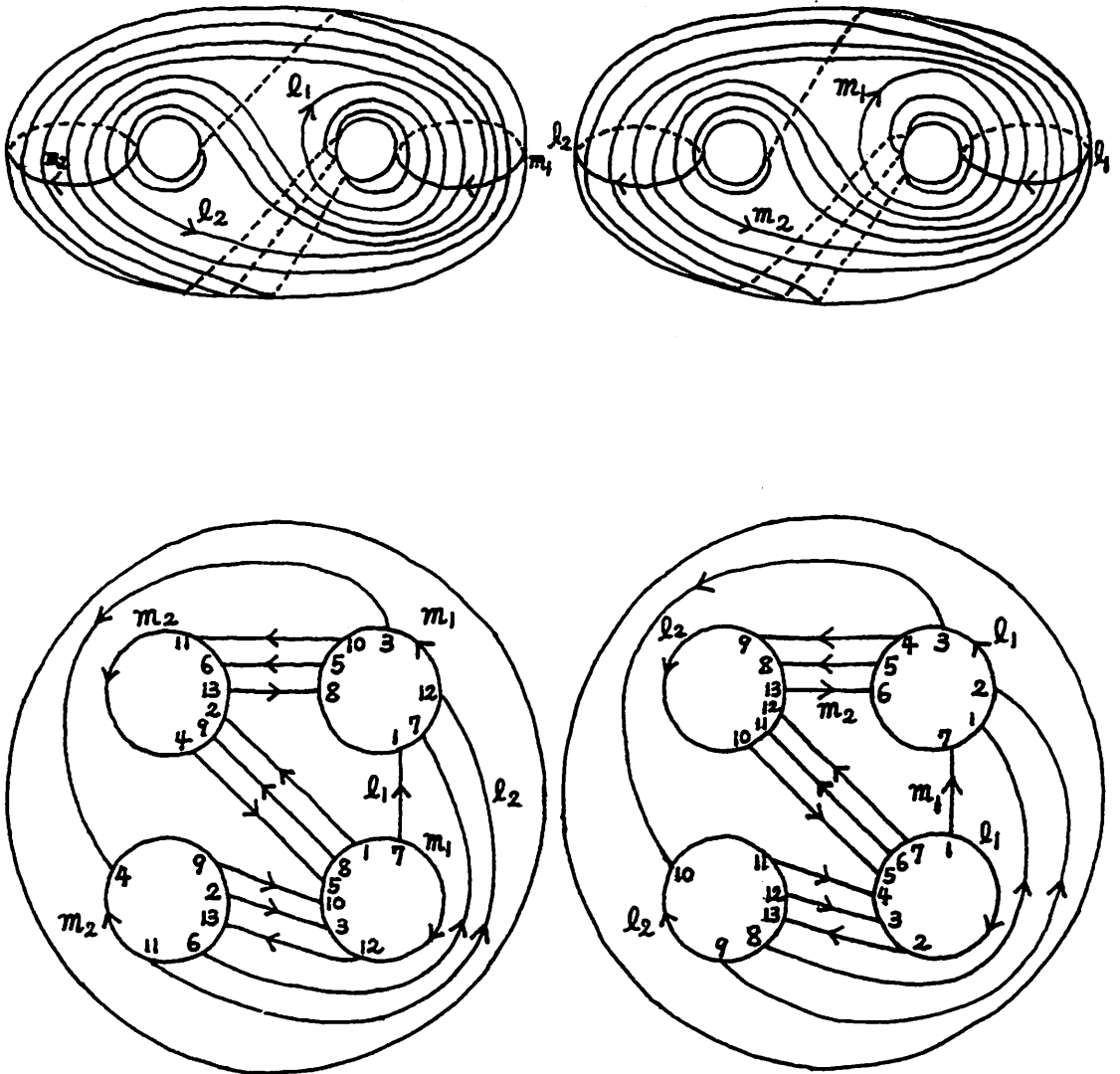


図8

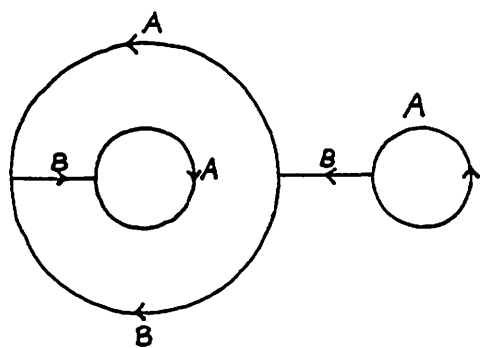


图 9

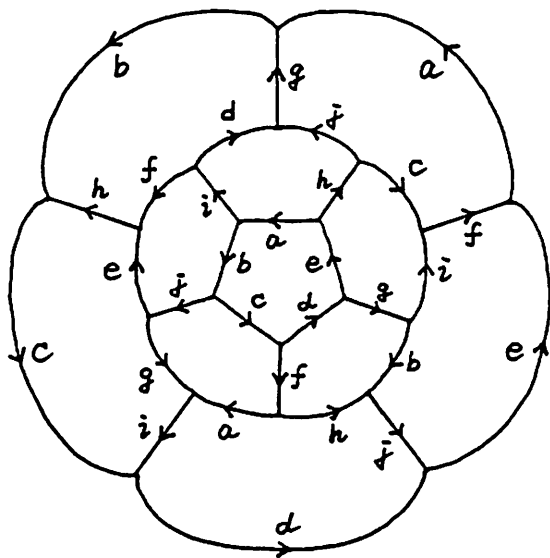


图 10

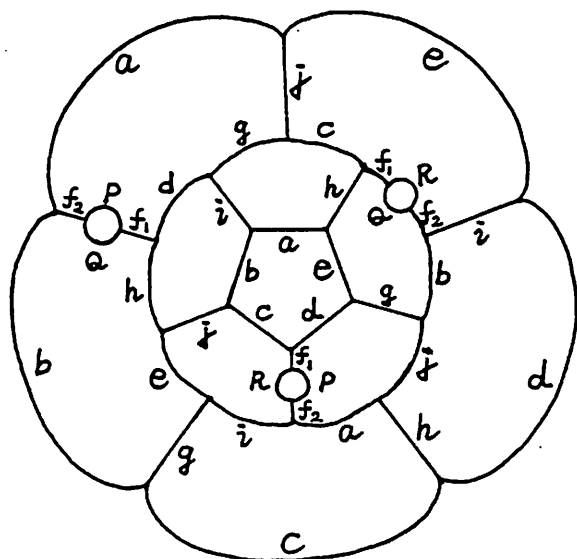
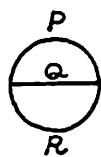


图 11

(38)

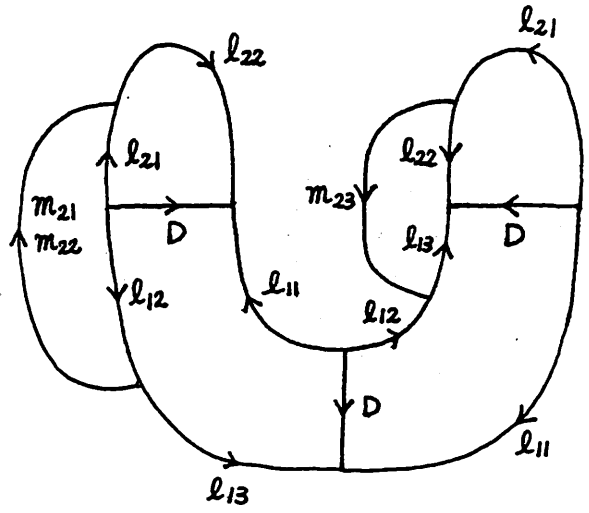
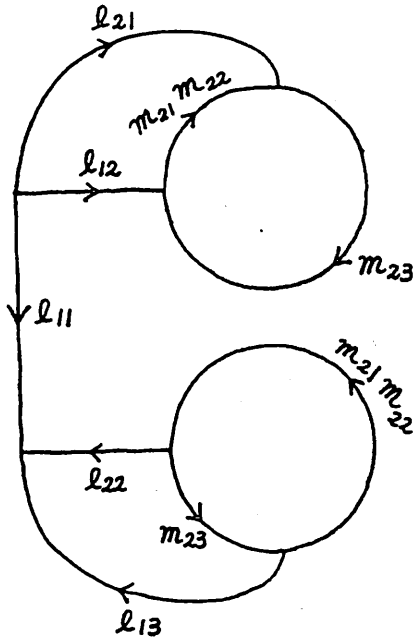


图 12

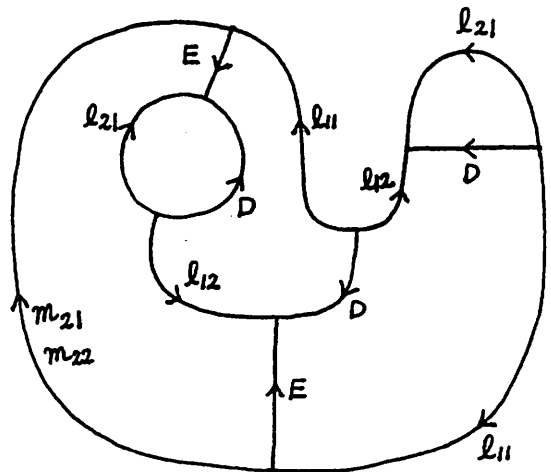
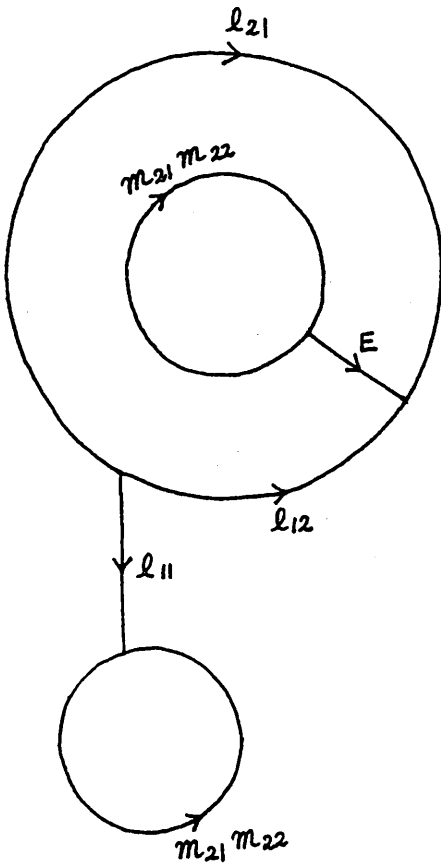


图 13

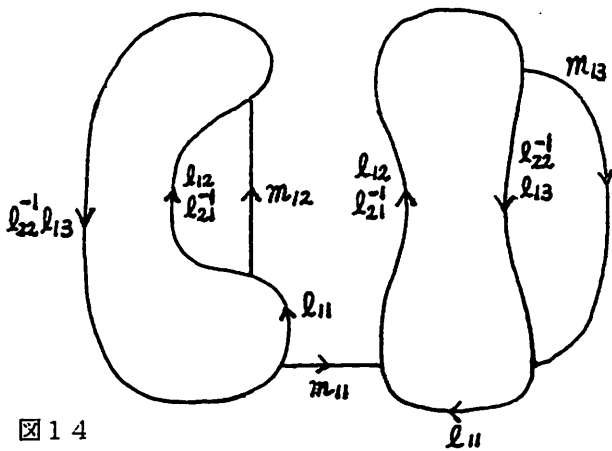
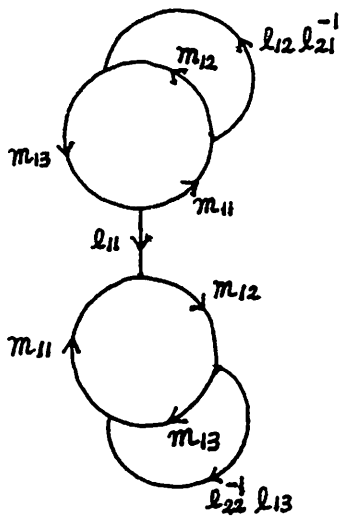


图 14

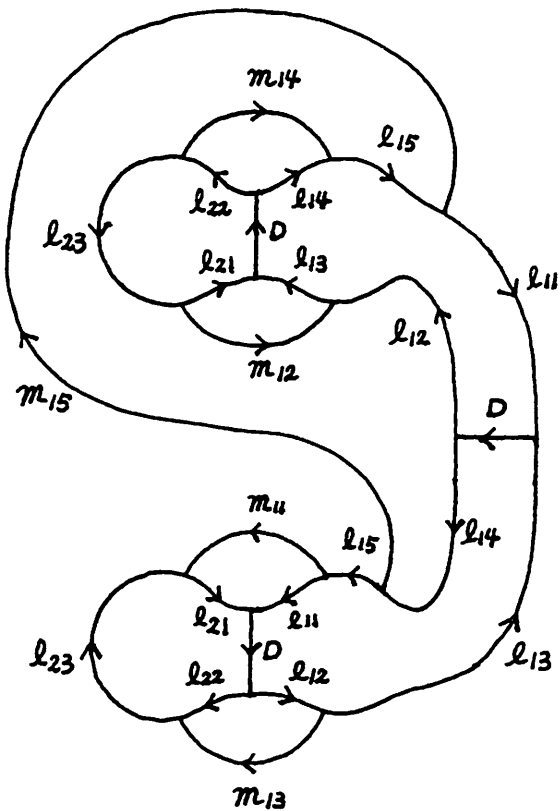
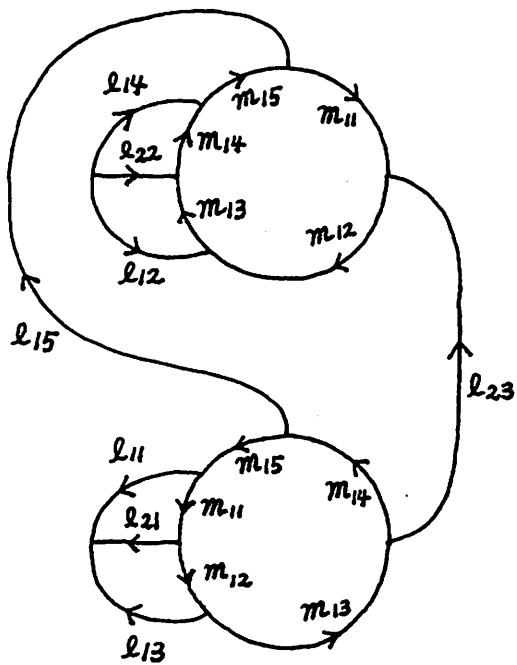


图 15

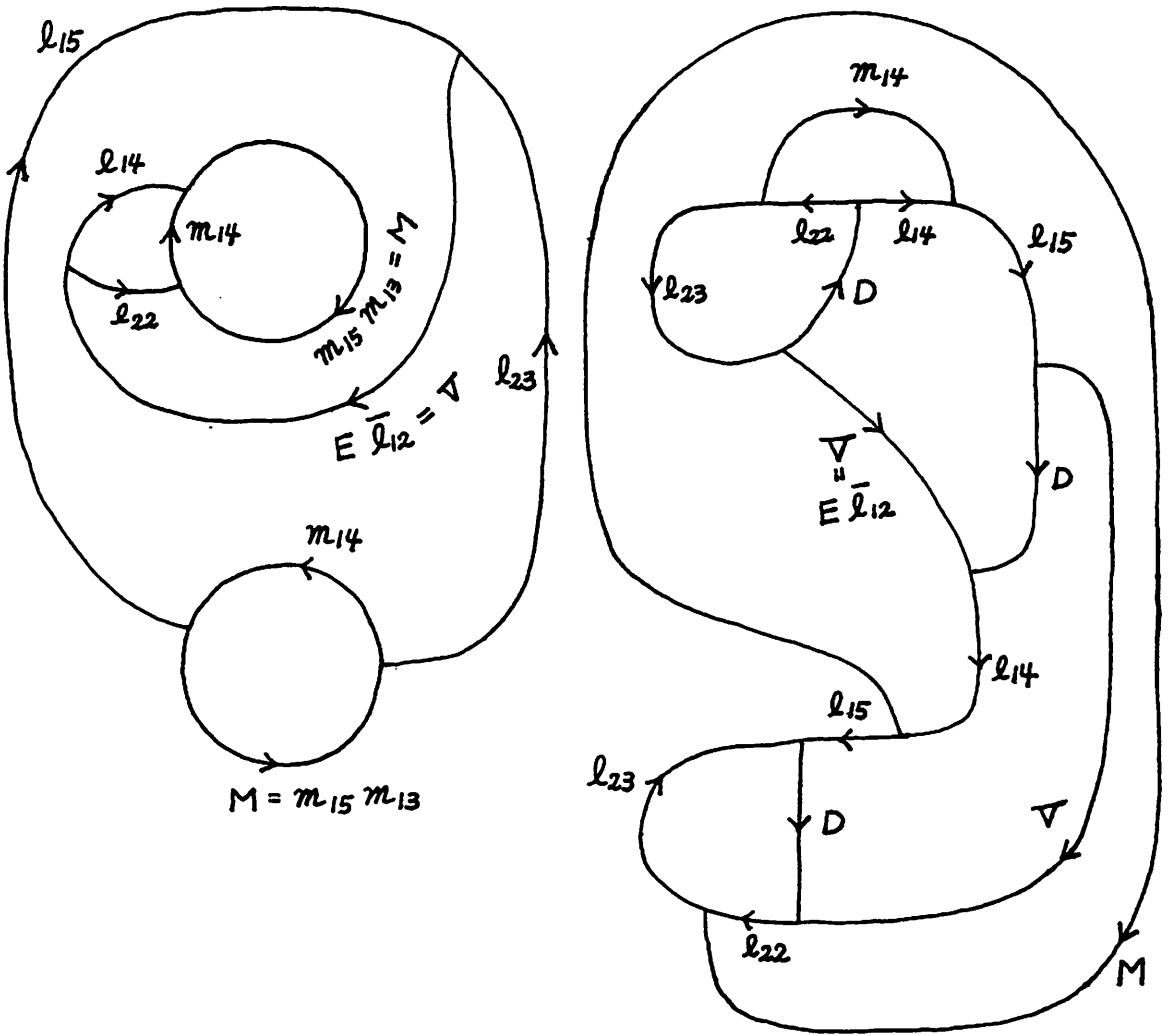


图 17

(42)

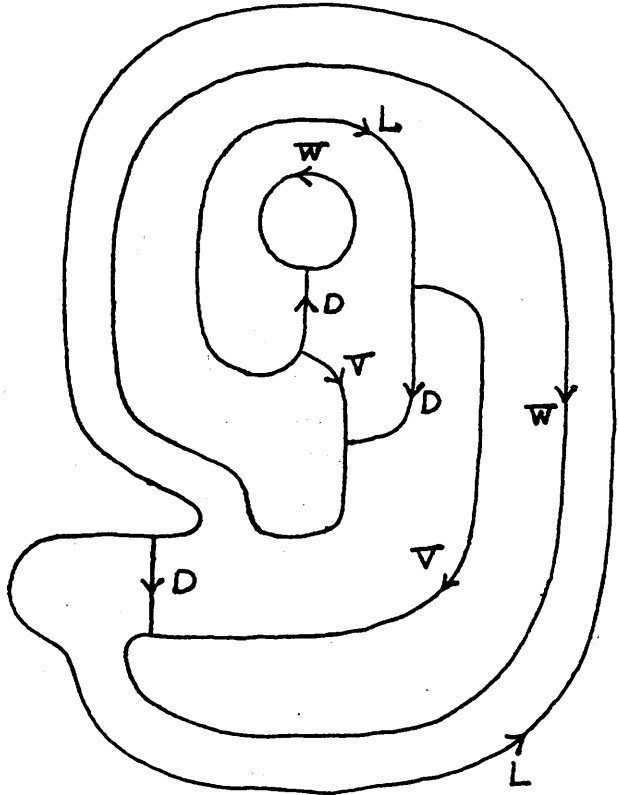
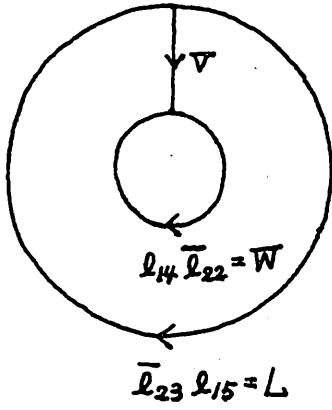


图 18

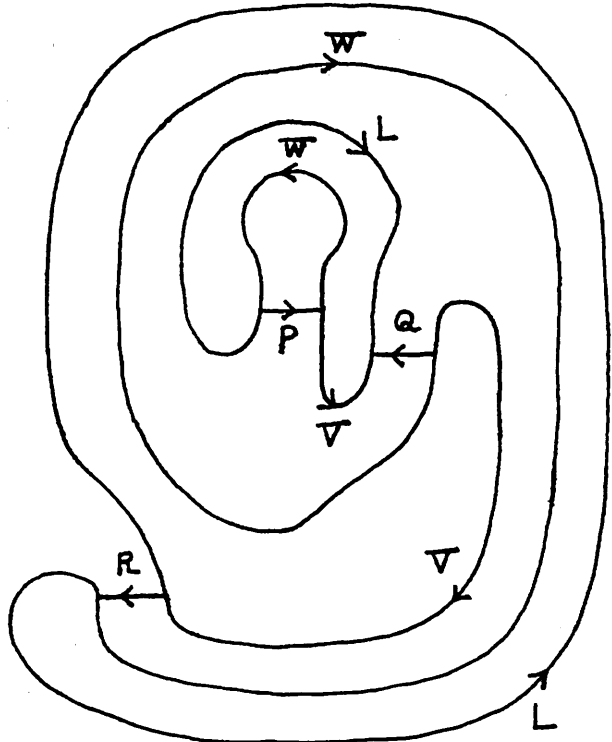
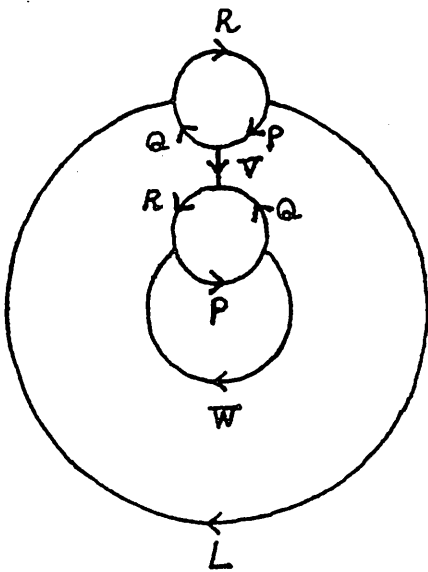


图 19

(44)

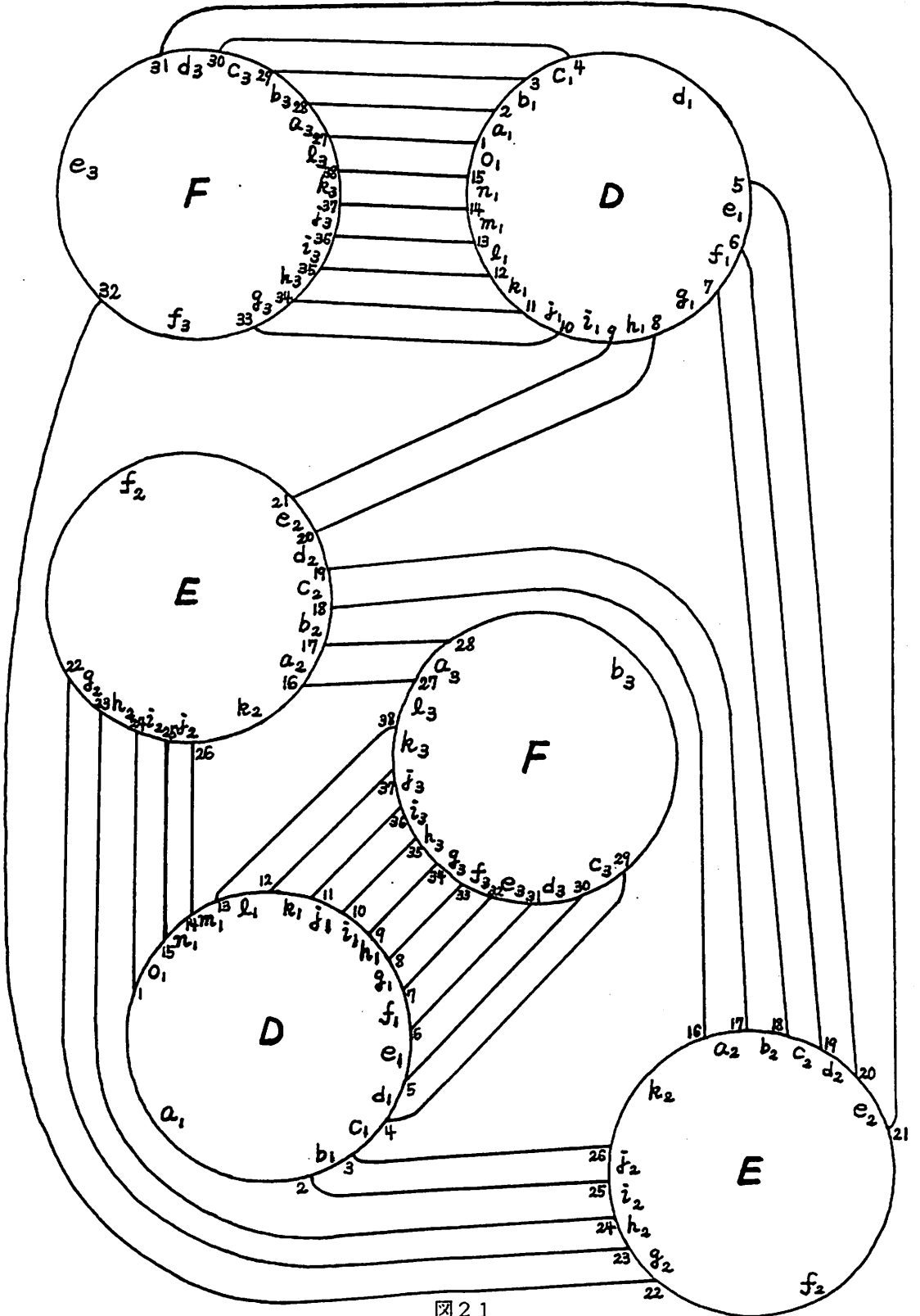


图 2 1

References

- [1] 山下正勝 , DS-diagramとHeegaard diagram , 数理科学講究録 636(1987)91-107.
- [2] 山下正勝 , DS-diagramの初等変形とは , 箱根セミナー記録 '86(1986),13-34.
- [3] Yamashita,M , D_1 -deformation of DS-diagram , Research Rep. of Gen. Ed. Fac. of Eng. Toyo Univ. , No.22(1987) , 49-55.
- [4] Ikeda,H & Yamashita,M & Yokoyama,K , Deformations of DS-diagrams , Topology and Computer Science (1987) , 81-138.
- [5] Hempel,J. , 3-manifolds , Ann. of Math. Studies 86 , Princeton Univ.Press (1976)
- [6] 本間龍雄 , ポアンカレ予想物語 13 , 日本評論社(1985)
- [7] 落合豊行 , コンピュータによる3次元多様体の構成とグラフィックスによる処理, 数理科学10(1984)22-29.