M^3 が homology sphere のとき，$\deg f=1$ の良い写像 $f: M^3 \to S^3$ について

本間龍雄

上の題目について，石井君から指摘された通り，何の結果も出ないことがわかりました。

p を f の singularity 上にない点 $p \in M$ とし，p の十分小さい球近傍 $\bar{U}_p$ をとり，$f|\bar{U}_p : \bar{U}_p \to f(\bar{U}_p)$ を同相写像とします。2次元球面 $\partial \bar{U}_p$ を折返し曲面として，f の singularity に加えた写像を $\tilde{f}$ とし，

$$\tilde{f}|\bar{U}_p : \bar{U}_p \to S^3 - f(\bar{U}_p)$$

が同相写像となるように $\tilde{f}$ を定義すると，$f|\bar{U}_p ; \bar{U}_p \to f(\bar{U}_p)$ が正または負の同相写像に対応し，$\deg \tilde{f}$ は $\deg f - 1$ または $\deg f + 1$ となります。この方法をくり返せば任意の写像度をもつ良い写像 $\tilde{\tilde{f}}: M^3 \to S^3$ を作ることができます。

現在は，M^3 を homology sphere として，連続写像 $f: S^3 \to M^3$ と $g: M^3 \to S^3$ が存在し，「$g \circ f : S^3 \to S^3$ と $f \circ g : M^3 \to M^3$ が共に恒等写像に homotopic」の前提に立って $f, g, g \circ f, f \circ g$ をそれぞれ良い写像で ε-homotopic に近似し，それ等の singularity の構造を比較検討しています。この4つの良い写像 $\tilde{f}, \tilde{g}, \widetilde{g \circ f}, \widetilde{f \circ g}$ の写像度は1です。

参考文献

本間龍雄他，幾何学的トポロジー，共立出版（21世紀の数学）1999。