

有向円3-多様体から S^2 への連続写像について

本間 龍 雄

Whitehead の定理により, 単連結な円3-多様体 M^3 は S^3 とホモトピー同値に存在するので, 連続写像 $f: M^3 \rightarrow S^3$ と $g: S^3 \rightarrow M^3$ が存在し, $g \circ f \simeq \text{id}_{M^3}$, $f \circ g \simeq \text{id}_{S^3}$ である。しかし合成写像 $g \circ f$, $f \circ g$ を具体的に理解するのは容易でないので, 私は今まで M^3 の単連結性と $g: S^3 \rightarrow M^3$ の存在の条件のもとで, 3次元ホーアノカル予想を考えてきた。しかし最近になって, $f: M^3 \rightarrow S^3$ の存在, $\deg f = 1$, $\pi_1(M^3) = 1$ と S^3 の幾何的構造を使うのが自然と考えるようになった。

その理由の一つが次の補題1にある。

補題1. L^3, N^3 は有向円3-多様体, $g: L^3 \rightarrow N^3$ は $\deg g > 0$ の連続写像とする。単連結な円3-多様体 M^3 と連続写像 $f: L^3 \rightarrow M^3$, 普遍被覆 $j: M^3 \rightarrow N^3$ が存在し, $g = j \circ f$ と次式が成立する。
 $\deg g = (\pi_1(N^3) \text{ の位数}) \times \deg f = \deg j \times \deg f$ 。

この補題1から私は「ホモトピー同値な二つの位相空間は同相であるか？」はむしろ大域的な問題であるが, 3次元ホーアノカル予想は比較的局所的な問題であると思うようになった。

補題1の証明 N^3 の一点を p とする。 $g^{-1}(p)$ の二点 ξ, τ を結ぶ L^3 の弧 A が存在し、 $g(A)$ の始点、終点を p に固定したまま、定値写像 $\text{const}(A) = p$ に homotopic なとき、同値関係 $\xi \sim \tau$ を定義し、 \sim の同値類 S を M^3 の点 S とし、 $f(\xi) = f(\tau) = S$, $j(S) = p$ とすると図式は可換となる。

U_ξ, V_p ($p = g(\xi)$) はそれぞれ L^3, N^3 の球近傍で $g(U_\xi) \subset V_p$, $\xi' \in U_\xi, g(\xi') = p'$ ならば、 U_ξ の弧 $\overline{\xi\xi'}$ が存在し、 $g(\overline{\xi\xi'}) \subset g(U_\xi) \subset V_p$ であるから、 $g(\overline{\xi\xi'})$ を通じて同値関係が保たれるので、 $j|_{f(U_\xi)}: f(U_\xi) \rightarrow g(U_\xi)$ は一対一対応となる。 故に $\text{int} V_p$ の位相 (より $j^{-1}(\text{int} V_p)$ の位相を導入すると、 M^3 は3-多様体、 f は連続、 j は局所同相即ち被覆写像である。

N^3 の点を $p, j^{-1}(p)$ の二点 A, A' を結ぶ弧 γ とする。 $j(\gamma)$ は N^3 の閉曲線であるから、 $\pi_1(N^3)$ の元 α が対応する。 このとき、同値関係 $A \sim A'$ と定義できる。 この同値類の数は $\pi_1(N^3)$ の位数 $(\text{deg } j)$ である。 また $\text{deg } g = \text{deg } (j \circ f) = \text{deg } j \times \text{deg } f$ は明らかである。

証明終り

定義 M^n, N^n を n -多様体であるとき、 $f: M^n \rightarrow N^n$ が良い写像であるとは、 M^n の各点 p に対し、 p と $f(p)$ の局所座標が存在し、 $f(p) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 以下の条件のうちどれかが成立することである。

(0) $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$

(1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1^2, x_2, \dots, x_n)$

(2) $f(z, x_3, \dots, x_n) = (z^2, x_3, \dots, x_n)$ $z = x_1 + iz_2$

(3) $f(x_1, z, x_4, \dots, x_n) = (x_1^2, z^2, x_4, \dots, x_n)$ $z = x_2 + iz_3$

p が(0), (1), (2), (3)の条件をみたすとき, それぞれの正則点, 折返し点, 分岐点, 折返し分岐点とよび, 正則点以外の点を特異点とよぶ, 折返し点, 分岐点, 折返し分岐点の集合をそれぞれ F, B, FB と書く。

命題 $\mathcal{C}(F) = F \cup FB, \mathcal{C}(B) = B \cup F(B), F(B)$ はそれぞれ M の $n-1$ 次元, $n-2$ 次元, $n-3$ 次元 南部分多様体で, $\mathcal{C}(F)$ と $\mathcal{C}(B)$ は FB で 横断的に交わる。

定理 M^3, N^3 を有向閉3-多様体, $g: M^3 \rightarrow N^3$ を連続写像とすると, g と ε -homotopic な良い写像 $f: M^3 \rightarrow N^3$ が存在する。

この定理を証明するためには, 良い写像を境界をもつ3-多様体に拡張しておく。 $g: B^3 \rightarrow B^2$ が良い写像とは g はマッピング, $g|_{\partial B^3}$ が良い写像, B^3 と B^2 のダブリを S^1, S^2 としたとき, g のダブリ $\tilde{g}: S^1 \rightarrow S^2$ が良い写像とたることである。 次の補題は定理の証明の核心であり, それに用いた手法を単連結な M^3 から S^3 への良い写像の研究に応用したい。

補題2 S^3 から S^2 への良い写像は B^3 から B^2 への良い写像に拡張できる。

M^3 は単連結, $f: M^3 \rightarrow S^3$ は $\deg f = 1$ の良い写像とする。
 S^3 の height function $h: S^3 \rightarrow [0, 1]$ を $h^{-1}(t) = S_t^2 (0 < t < 1)$, $S = h^{-1}(0)$ は南極, $N = h^{-1}(1)$ は北極とする。 各 S_t^2 の height function $h_t: S_t^2 \rightarrow [0, 1]$ を $h_t^{-1}(u) = S_{tu}^1 (0 < u < 1)$,

[4]

$S_t = h_t^{-1}(0)$ は S_t^2 の南極, $N_t = h_t^{-1}(1)$ は S_t^2 の北極とする。さらに $\{S^3$ の南極 S , 北極 N , S_t^2 の南極 S_t , 北極 N_t ($0 < t < 1$) $\}$ の合併集合は S^3 の大円 C となつていゝものとする。四正画くときは $R^3 = S^3 - N$ とみなし, $S_t^2 - N_t$ を R^3 の xy -平面に平行な平面, $S_t^2 - N_t$ を y 軸に平行な直線として画く, S^3 の南極 S は R^3 の原点とする。

良い写像 $f: M^3 \rightarrow S^3$ の singularity の像は S_t^2 と横断的に交わるものとする。横断的の意味を説明する。

0) S, N は正則点の像とする, 例えば南極 S の球近傍 W_S の逆像 $f^{-1}(W_S)$ には $\deg_+(S)$ 個の sheet 3-球 と $\deg_-(S)$ 個の sheet 3-球 があり, S に於ける幾何的写像度は $\deg_+(S) + \deg_-(S) = \deg_+(S) - \deg_-(S) = \deg f = 1$ となる。

1) $f|_{f^{-1}(S_t^2)}: f^{-1}(S_t^2) \rightarrow S_t^2$ を用いて sheet の重なり具合を示す。

2) $f|_{f^{-1}(S_t^2 u)}: f^{-1}(S_t^2 u) \rightarrow S_t^2 u$ を用いて, 折返しや分岐の構造を示す。

3) 分岐曲線像は有限個の t に於て, 極大点, 極小点をもち, 折返し曲面像は有限個の極大点, 極小点, 鞍部をもち。

2) の $f|_{f^{-1}(S_t^2 u)}: f^{-1}(S_t^2 u) \rightarrow S_t^2 u$ をおみだくじ表示とロキんでいゝが, その理由は下図のように $f^{-1}(S_t^2)$ と分岐点 b の近傍がおみだくじを用いて簡単に表示できるからである。

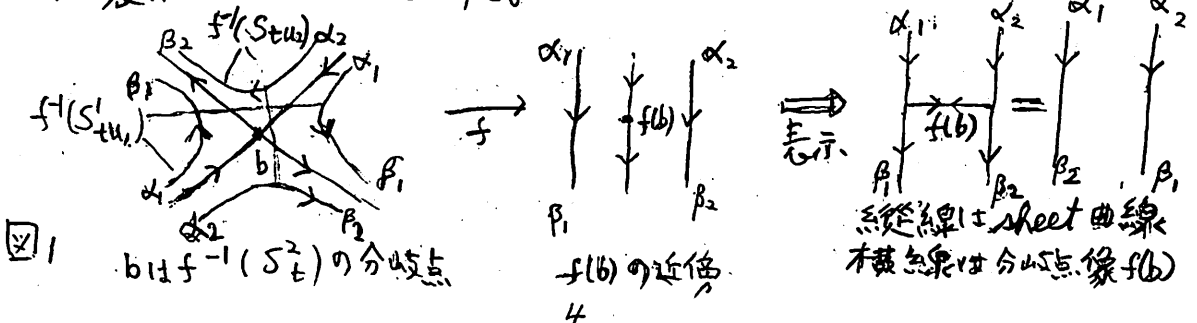
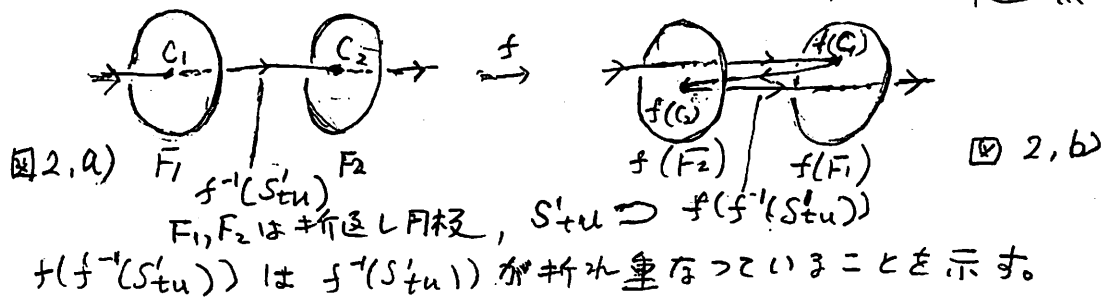


図1

b は $f^{-1}(S_t^2)$ の分岐点

折返し点のみだぐび表示はさらに簡単である。 C_1, C_2 は折返し点である。



M^3 の単連結性を用いて, $f: M^3 \rightarrow S^3$ の singularity を解消することを目標としている。もしも折返し曲面と折返し分岐点が一掃できれば, $\deg f = 1$ により折返し曲面も解消されていることになり, f は同相写像である。Singularity を解消する操作(定理, 補題 2 の証明で用いたトリックの拡張)の基本となるものを紹介する。

図 2.2) の折返し点像 $f(C_1), f(C_2)$ を解消した図が図 3 である。折返し円板像 $f(F_1), f(F_2)$ は連結して $f(F)$ となり, 分岐円板像 $f(B)$ がカコわり, あまたぐび表示の sheet 曲線 \rightarrow と \rightarrow が $f(B)$ を通過すると \rightarrow が生じ, $f(f^{-1}(S' + u)) \rightarrow$ に変化することを理解して欲しい。

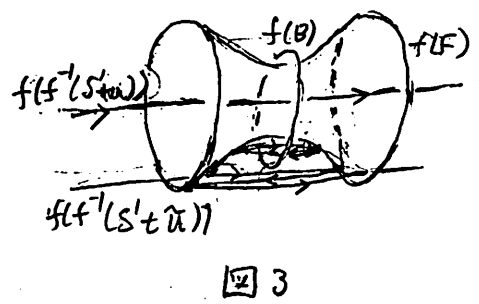


図 3.1) は S^3 上の図で, 折返し曲面像と交叉線の loop, 正負の分岐点像, loop の交叉点が解消する。loop の内部では幾何的写像度が 2 が減少する。

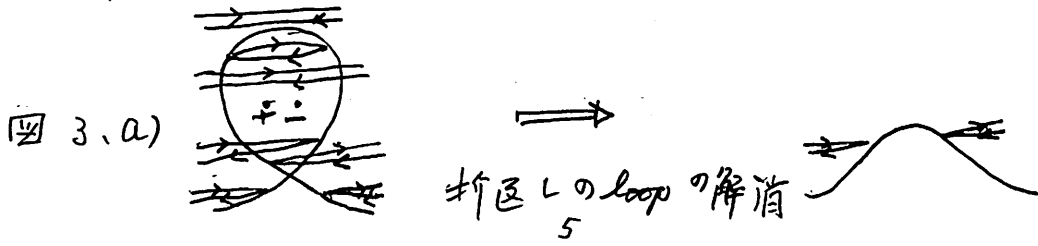


図3, b)は S^3 内の折返し分岐点像の対を解消する図で、同時に正負の分岐曲線像、折返し曲面像の交叉線も解消する。分岐曲線像を含む領域の幾何的写像度は2だけ減少している。図3, a)の3次元への応用である。

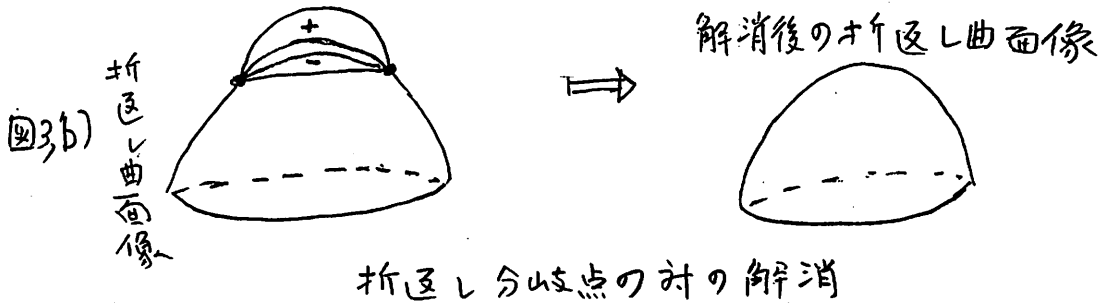
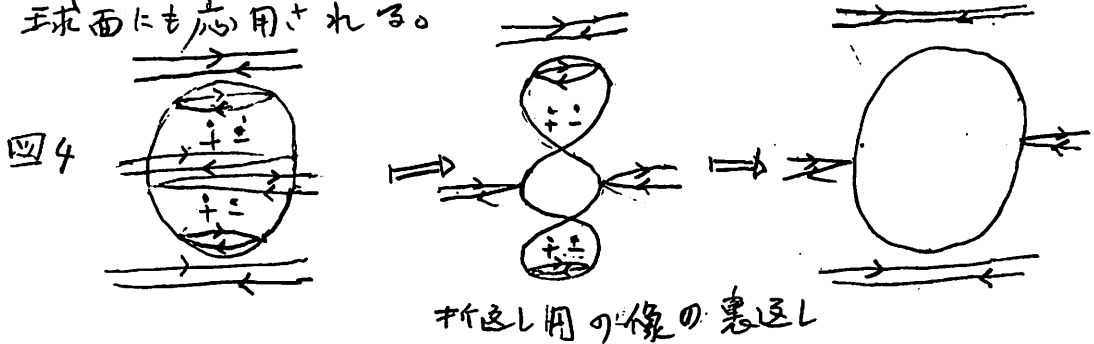


図4は S^2 における折返し円像と正負の分岐点像の対が解消され、折返し円像が裏返しになる。円の内部の領域の幾何的写像度は4だけ減る。 S^3 内の折返し球面にも応用される。



以上のような操作等では、すべての折返し曲面、折返し分岐点像が解消すれば、 $\deg f = 1$ より f は分岐曲線ももたないのて、 f は同相写像となる。従って M^3 の単連結性より、 S^3 の折返し曲面像、と折返し分岐点像を意味し、以上のような操作が順序よく行われるようにしたい。

文献

共立講座, 21世紀の数学, 23, 幾何学自S.T.ホロニー。