

S^n の写像の singularity の解消について 本間 龍雄

箱根セミナーでホップカレ予想を目標にして報告してきたことの大筋をまとめました。

定義 連続写像 $f: M^n \rightarrow N^n$ において, M^n の点 p において f が局所同相 ($\exists U_p: f|U_p: U_p \rightarrow f(U_p)$ が同相) なとき, p を f の 正則点, 正則点でない点を 特異点, 特異点の集合を singularity という。

Singularity の単結化, 解消を次の場合に考える。

- i) 良い写像による近似定理では連続写像 $f: S^{m-1} \rightarrow S^{n-1}$ の singularity ($n=2, 3$),
- ii) 3次元ホップカレ予想では良い写像 $f: S^3 \rightarrow M^3$ の singularity.
- iii) 折返しのない良い写像 (分岐被覆) $f: S^3 \rightarrow S^3$ の例。

この paper は PL トポロジーに属し, あるいは piecewise smooth なトポロジーに属するとも言える。少なくとも図は piecewise smooth である。

良い写像の定義 M^n, N^n が両 n -多様体であるとき, $f: M^n \rightarrow N^n$ が 良い写像 であるとは, M の各点 p と $f(p)$ の局所座標が存在し, $f(p) = f(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$ で次の条件の一つをみたすことである。

$$(1) f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n),$$

$$(2) f(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2, \dots, x_n),$$

$$(3) f(z, x_3, \dots, x_n) = (z^2, \dots, x_n) \quad z = x_1 + iz_2,$$

$$(4) f(x_1, z, x_4, \dots, x_n) = (x_1^2, z^2, x_4, \dots, x_n) \quad z = x_2 + iz_3,$$

p が (1), (2), (3), (4) をみたすとき, それぞれを 正則点, 折返し点, 分岐点, 折返し分岐点 といい, 正則点以外を 特異点 という。折返し点, 分岐点, 折返し分岐点の集合をそれぞれ F, B, FB と書く。

次の命題は良い写像の定義より直ちに導かれる。

命題 1 $dF = F \cup FB$, $dB = B \cup FB$, FB は M^n の $n-1$, $n-2$, $n-3$ 次元部分多様体で, dF と dB は FB で横断的に交わる。

次の命題は連続写像を離散化するための強力な道具である。

命題 2 M^n, N^n が同 PL n -多様体で, $f: M^n \rightarrow N^n$ が連続ならば, f と ε -homotopic な 非退化 PL 写像 が存在する。

K, L を M^n, N^n の単体分割とし, $g: K \rightarrow L$ を 非退化単体写像 とすると, K の n -単体の内点で g は正則, K の $n-1$ 次元単体の内点で g は正則または折返し点である。従って良い写像で近似するために K の $n-2$ 次元 skeleton で修正する。

近似定理 M^n, N^n が同 n -多様体 ($n=1, 2, 3$) で, $f: M^n \rightarrow N^n$ が連続ならば, f と ε -homotopic な良い写像が存在する。

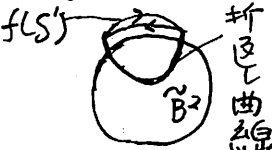
近似定理は次の補題より導かれる。

補題 $n=2, 3$ なら, S^{n+1} から \tilde{S}^{n-1} への良い写像は n -球 B^n から n -球 \tilde{B}^n への良い写像に拡張できる。

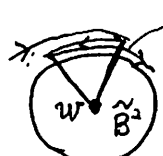

$g: B^n \rightarrow \tilde{B}^n$ が良い写像とは, $g|_{\partial B^n}: \partial B^n \rightarrow \partial \tilde{B}^n$ が良い写像, B^n のダブル S^n から \tilde{B}^n のダブル \tilde{S}^n への g の ダブ ル が良い写像となることである。

近似定理は補題より導かれる。例えば $n=3$ の場合、 M^3 の 1-単体 σ の十分小さい normal disk D で補題 ($n=2$) を適用し、それ D の suspension $D \circ \sigma$ に拡張すると、 M^3 の頂点以外で良くなる。さらに M^3 の頂点で補題 ($n=3$) を用いる。

補題 ($n=2$) の証明の outline

α 型  図のような $f: S^1 \rightarrow \tilde{S}^1$ を \tilde{S}^1 上の一点に単調に縮める homotopy を \tilde{B}^2 の同心円 で実現すると極小点を

一つもつ折返し曲線像が生じる。

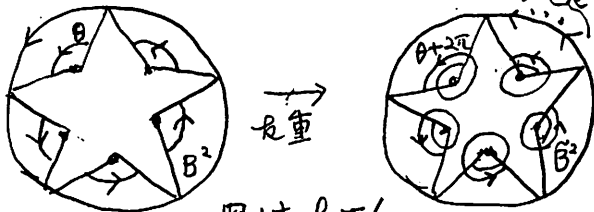
β 型  \Rightarrow 修正 

Whitney の cusp w

β 型では有名な Whitney の cusp を一つの極小点をもつ折返し曲線像と一つの分岐

点像に分離化する。

α 型と β 型の操作を繰り返して、すべての S^1 上折返し点を解消すると、写像は S^1 から \tilde{S}^1 への l (の重) の局所同相写像としてよい。 B^2 の星型の部



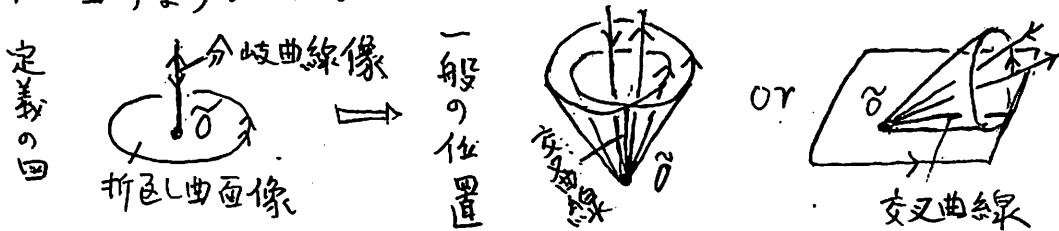
図は $l=6$

分は \tilde{B}^2 に合同に写像し、星型の凹の頂点の外角を θ とすると、像の角は $\theta + 2\pi$ とする。 B^2 (\tilde{B}^2) の中に $l-1$ 個の分岐点 (像) が生じ、 $n=2$ の場合の証明が終る。

補題 ($n=3$) の証明の準備

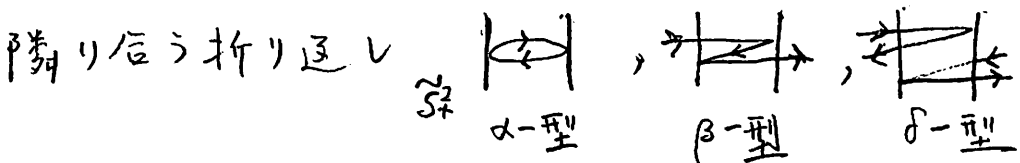
S^2 から \tilde{S}^2 への良い写像を homotopy と操作によって、単純化、解消する。その homotopy と操作を B^3, \tilde{B}^3 で

同心球面の面の写像 $f_t: S_t^2 \rightarrow \tilde{S}_t^2$ ($1 \leq t > 0$, $S_t^2 = S^2$, $\tilde{S}_1^2 = \tilde{S}^2$)
 により実現する。homotopy は球の中の分岐曲線(像), 折返し曲面(像)で具体化され, 操作を行うと分岐曲線(像)に極点, 折返し曲面(像)に極点, 鞍点が生じる。
 折返し曲面像は 一般の位置 におく。従って折返し曲面像の 交叉曲線 が重要となる。さらに良い写像の定義では smooth な図形が piecewise smooth な図形となり, 重なっている図形が分離される。例えば折返し分岐点像 $\tilde{\sigma}$ の近傍の図は下の図のようになる。

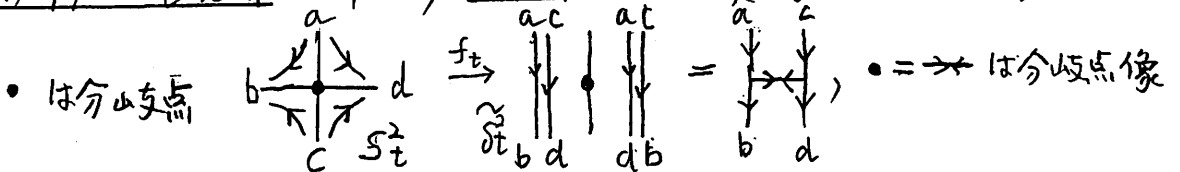


sheet, 隣り合うの説明

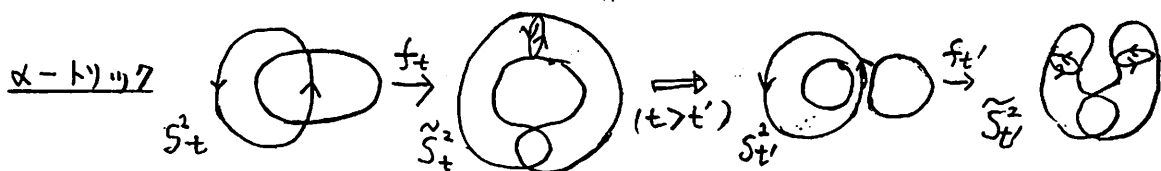
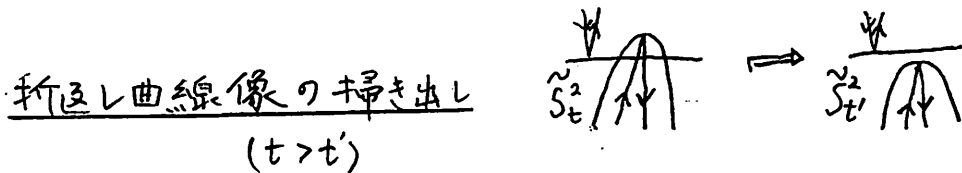
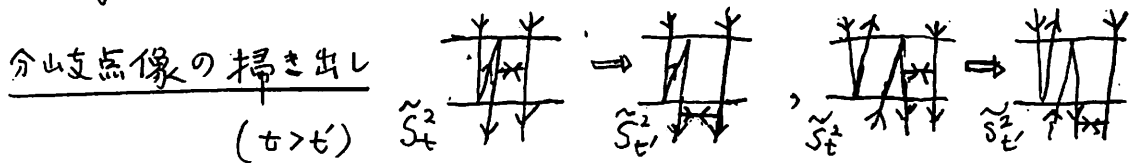
下の図の S_t^2, \tilde{S}_t^2 上の図の矢印のついた線は sheet を表わしている。写像により S_t^2 の何枚かの領域が \tilde{S}_t^2 上で重なるとき, その一枚一枚を sheet と呼ぶ。単純化, 解消は 隣り合う sheet, 折返し, 分岐で行う。



分岐点で隣り合う sheet の間で 互換が生じる。下の図を あみだくじ表示 と呼び, 横線 は分岐点像で互換を表わす。



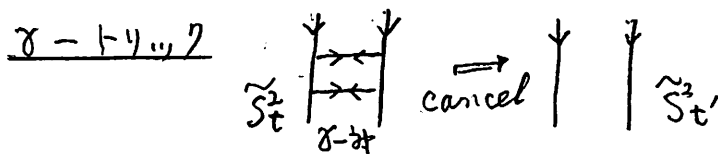
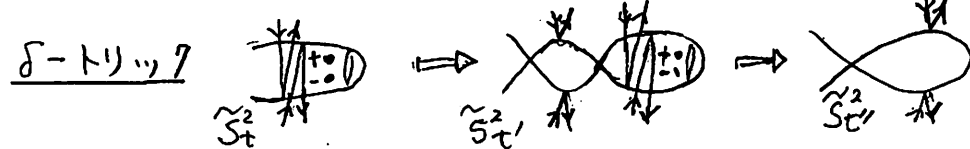
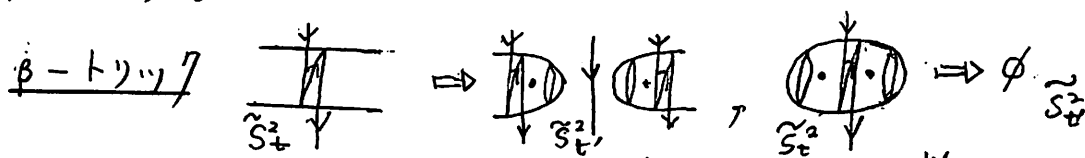
補題 ($n=3$) の証明の outline
Singularity の解消のための操作



α -トリックを行うと B_t^3 は $=$ の球 ${}_1B_{t'}^3$ と ${}_2B_{t'}^3$ の連結和の正則近傍となり, f_t は ${}_1f_t: \partial_1 B_t^3 \rightarrow \tilde{S}_t$ と ${}_2f_t: \partial_2 B_t^3 \rightarrow \tilde{S}_t$ に分離し, f_t の Singularity も $\partial_1 B_{t'}^3$ と $\partial_2 B_{t'}^3$ に分離する。さらに

$$\deg f_t = \deg {}_1f_{t'} + \deg {}_2f_{t'}$$

が成立する。



α, β, δ -トリックにより折返し曲線は解消できるので, 残った分岐点を γ -対 (同じ互換で表示される?) に分け, γ -対を cancel して 補題 ($n=3$) の証明が終る。

良い写像 $f: S^3 \rightarrow \tilde{S}^3$ の例

f は折返レのない写像 即ち 分岐被覆で、
singularity は 自明な分岐曲線 $l \subset S^3$ であ
るが、 $f(l) \subset \tilde{S}^3$ は trefoil knot で、 $\deg f$
 $= 3$ である。これを一般化して singularity

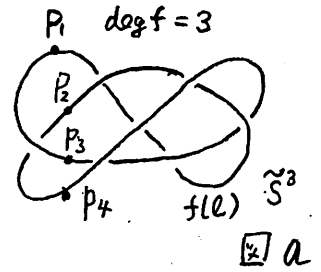


図 a

$L = \{l_1, \dots, l_m\}$ は 自明な各々、 $f(l_i), i=1, \dots, m$ は trefoil
knot の連結和で、互いに絡んでいないようにできる。

S^3 の等高球面は $S_t, 0 < t < 1$, で、南極 S , 北極 N の高さは $0, 1$
とする。 $f(S) = f(N) = \infty$ (\tilde{S}^3 の無限遠点) で、 $f(S_t)$ は ∞ から
出発し、最後に ∞ に収束するが、 $\deg f = 3$ であるので、 $t = \frac{1}{2}$
で一度だけ ∞ を通過する。 $\tilde{S}^3 - f(l)$ の点で幾何的写像度は
 3 , $f(l)$ の点では 2 である。 S^3 の高さが t 以下の点集合を B_t と書
くが、 B_t は 3 次元球で、 $\partial B_t = S_t$ である。 \tilde{S}^3 の点の $f(B_t)$
に関する幾何的写像度は重要で、 t と共にその点の幾何的写
像度は単調に増加する。 図の領域の数字は $f(B_t)$ の幾何的
写像度を表わす $f(S_t)$ の図の矢印は normal vector で t
が増加すると、 $f(S_t)$ はその方向に移動する。

図 a の p_1, p_2 でそれぞれなめくじと金棒が生じ、 p_3, p_4
で金棒となめくじが消え

るが、この二つの図形
は本質的な意味を
もつ。

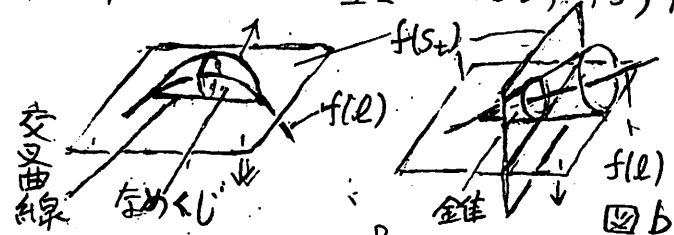


図 b

$f(S) = \infty$ を含む 1 重領域 $f(B_t)$
は単調に拡大し、0 重領域或 $f(S^3 - B_t)$
は単調に縮小する。 図 c は p_1 で 2 重
領域のなめくじが生じた直後の図である。
 a, b は l と S_t の交点の像、 c, d は $f(l)$ と
 $f(S_t)$ の交点、即ち異なる sheet 上にある。

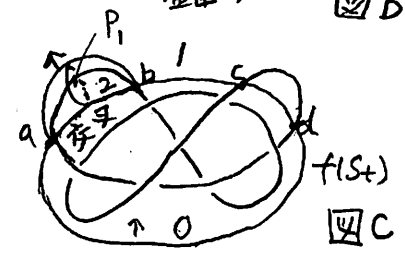
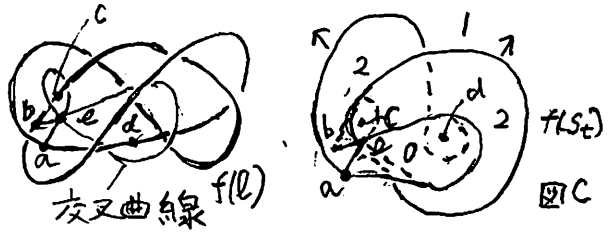
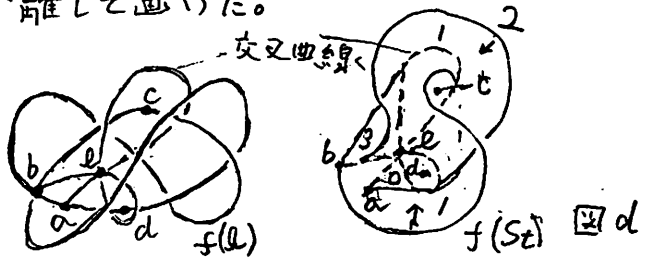


図 c

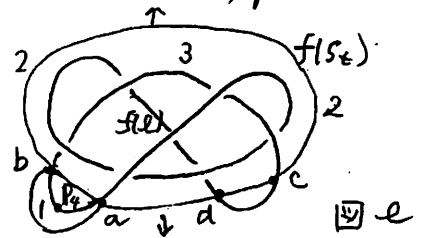
図bのなめくじは成長し
 つつ0重領域の境界を造り、
 p_2 でなめくじの腹に頂点bが
 突っこみ、3重領域の小さな
 錐が生じ、図cとなる。0重
 領域は大きな錐であり、縮小している。cは3重点、 $f(S_t)$ の
 動点b,cは p_2 でずれる。c,dはそれぞれ錐の底面上にある。 $f(l)$ と
 $f(S_t)$ は見易くするために分離して画いた。



図dは $f(S_t)$ が $\infty(t=\frac{1}{2})$
 を通過した後で、1重領域
 は有界となり、なめくじが縮
 小しつつある。2重領域は
 広がらぬ、3重領域は大
 きな錐となり、さらに拡大する。0重領域は小さな錐となり、 p_2 が消える。



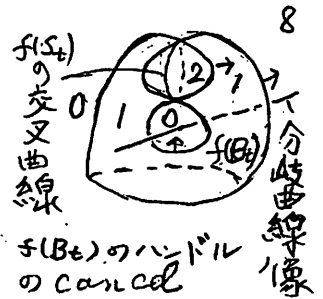
図eは p_3 で0重領域が消えた
 後の $f(S_t)$ で、1重領域は小さな
 なめくじとなり、さらに p_4 で消える。
 同時に動点a, b, c, dも消え、
 その後 $f(S_t)$ は球面となり、
 最後に ∞ に収束する。0重領域が p_3 で消える時刻を t_0
 とし、0重領域の境界を \tilde{S}_t とすると、 \tilde{S}_t は球面 S^2 、 $\{t_0, \infty\}$ は \tilde{S}^3 、height functionの等高球面となる。



例と3次元ホップリンク予想

M^3 を単連結な閉3次元多様体、 $f: S^3 \rightarrow M^3$ にSingularityが分岐
 曲線のみが良い写像とする。 $\gamma(f(B_t))$ を M^3 のheight function
 $\tilde{h}: M^3 \rightarrow [0, \infty)$ の等高曲面とすることができ、有限個の臨界値
 でハンドルが生じ、 M^3 のバンドル分解となる。さらに分岐曲線

像の関係するハンドルは cancel できることを証明したい。それができれば、 f は Singularity をもたない局所同相写像 (被覆写像) に修正でき、単連結性により M^3 は 3次元球面となる。



例と補題 ($n=4$)

補題は $n=2, 3$ で成立したが、これを $n=4$ に拡張したい。そのためには良い写像の定義を4次元に適応するように改めなければならぬ。Singularity は折返と分岐だけでなく不十分で、例えばなめくじや金魚が3次元で生じたり消えたりする homotopy や操作を4次元で実現する piecewise smooth な図形を加えるべきである。この改良により PL あるいは piecewise smooth な4次元ホアンカレ予想を有限化、高維散化する方法があると思う。

参考文献

- (1) 「ホアンカレ予想物語」 (数セミ・ブックス), 日本評論社 (1985)
- (2) 「幾何学的トポロジー」 (21世紀の数学), 共立出版 (1997)
- (3) 「数学七つの未解決問題」, 森北出版 (2002)