HAKONE SEMINAR 17 (2001) 1-5.

折返しのない良い写像 $f: S^3 \to M^3$ と M^3 のハンドル分解

本間 龍雄

M^3 を有向閉 3-多様体，$f: S^3 \to M^3$ を 3-球面 S^3 から M^3 への折返しのない良い写像とする。$h: S^3 \to [0,1]$ は height function で，$h^{-1}(t) = S_t$ $(0<t<1)$ は S^3 の同心球面，$h^{-1}(0) = S_0$ は南極，$S_1 = h^{-1}(1)$ は北極とする。f と h を用いて，height function $\tilde{h}: M^3 \to [0, \alpha]$ $(0 < \alpha \leqq 1)$ と $\tilde{h}$ による M^3 のハンドル分解を作る。

一般の位置の理論より，f, h は次の条件をみたすものとして良い。分岐曲線 $L = \{l_1, \cdots, l_n\}$ は有限個の t に関する臨界点を除いて S_t と横断的に交わる。L の像 $f(L) = \{f(l_1), \cdots, f(l_n)\}$ は互いに交わらない閉曲線である。$S^3 - L$ の点 p で f は局所同相で向きを保つ。$q = f(p)$ における幾何的写像度 $\deg(q, f)$ は f の(代数的)写像度 $\deg f > 0$ と一致し，L の点 p の像 $q = f(p)$ においては $\deg(q, f) = \deg f - 1$ となる。

$h^{-1}([0, t]) = B_t$，$h^{-1}([t, 1]) = B_t^c$ $(0<t<1)$ はそれぞれ南極，北極を中心とする 3-球である。$k = 0, \cdots, \deg f$ のとき

$$G(k, t) = cl\{q \in M^3 - f(L) \mid \deg(q, f|B_t) = k\}$$

と定義すると，t の臨界値を除いて次式が成立する。

$0 < k < \deg f$ ならば，

$$bd(G(k, t)) \subset bd(G(k-1, t)) \cup bd(G(k+1, t))$$

また，$k = 0$，$\deg f$ のときは，

$$bd(G(0, t)) \subset bd(G(1, t))$$

$$bd(G(\deg f, t)) \subset bd(G(\deg f - 1, t))$$

さらに $G(0,t)=cl(M^3-(f(B_t)))$ は単調に縮小する。

$\alpha\ (0<\alpha\leqq 1)$ は次式をみたすものとする。

$$G(0,t)\neq\phi,\quad 0\leqq t<\alpha$$

$$G(0,t)=\phi,\quad \alpha\leqq t\leqq 1$$

M^3 の height function $\hat{h}: M^3\to[0,\alpha]$ を有限個の臨界点（臨界値，臨界点は Prop. 2 で定義する）を除いて，次式で定義すると，M^3 のハンドル分解が可能となる。

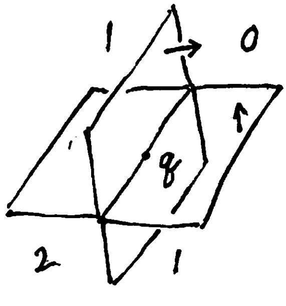
$$\hat{h}(bd(G(0,t)))=t$$

t が臨界値のときは，$f(B_{t-\varepsilon})$ に 0, 1, 2, 3－ハンドルを加えて $f(B_{t+\varepsilon})$ と同相となる。

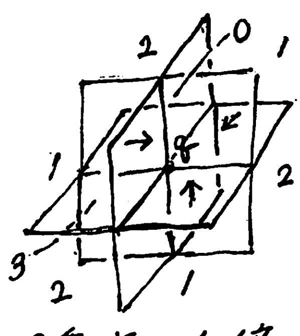
Proposition 1　t が臨界値でなければ，$bd(G(0,t))$ は有向閉曲面，従って M^3 は $bd(G(0,t))$ により $G(0,t)$ と $f(B_t)$ に分けられる。

証明　t が臨界値でないから，$f(S_t)$ の横断的に交わる点 q と分岐曲線の極大点，極小点以外の点の像 q の近傍を確めれば良い。下の図によって $bd(G(0,t))$ は有向閉曲面である。図の数字は $G(k,t)$ の k であり，矢印は t の増加する方向を示す。

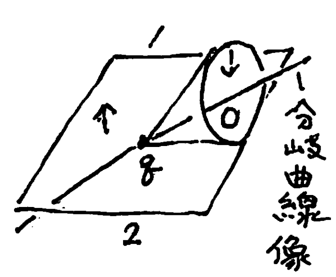
証明終り



2重点の近傍



3重点の近傍



分岐点像の近傍

Proposition 2　有限個の臨界値 t において，各々一個のハンドルが生じる。

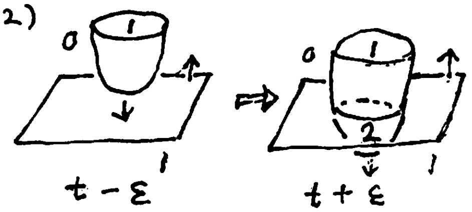
証明　$f(B_{t-\varepsilon})$ にハンドルを加えて $f(B_{t+\varepsilon})$ と同相になる。0−ハンドルと3−ハンドルの場合は，height function の定義 $\hat{h}(bd(G(0,t)))=t$ において，境界 $bd(G(0,t))$ 上に臨界点が定まらないので，極限を用いて臨界点を定める。

a) 0−ハンドルは $t=0$ のみに生じ，南極 S_0 の像 $f(S_0)$ が臨界点となるが，$G(0,0)=M^3$，従って $bd(G(0,0))$ は空集合となり，$f(S_0)$ を含まない。故に $t=0$ における臨界点は $\lim_{\varepsilon\to 0}(bd(G(0,\varepsilon)))=f(S_0)$ で定義する。

b) a)と同様で，t で3−ハンドルが生じ，g が臨界点のときは $\lim_{\varepsilon\to 0} bd(G(0,t-\varepsilon)))=g$ で定義する。

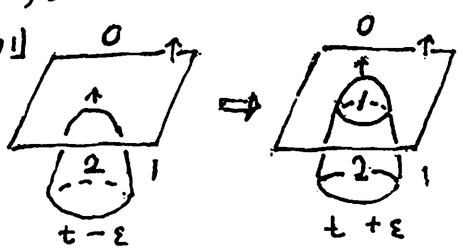
(1) $t=0$，$f(S_0)$ に0−ハンドルが生じる。

(2)



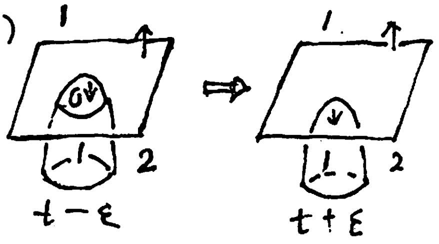
1−ハンドルが生じる。数字は幾何的写像度を表わし，矢印は t の増加する方向を表わす。

例



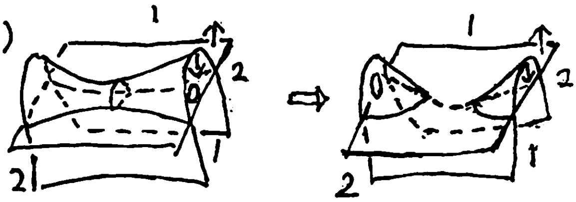
ハンドルは生じない。矢印が同方向の場合は $G(0,t-\varepsilon)$ と $G(0,t+\varepsilon)$ は同相である。

(3)



3−ハンドルが生じる。

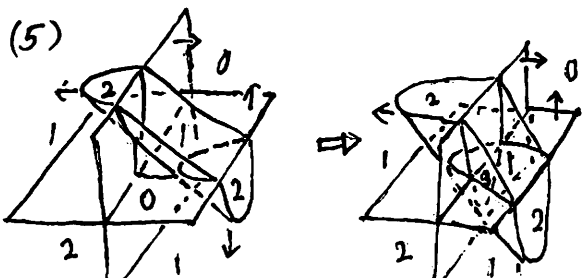
(4)



$t-\varepsilon$ $t+\varepsilon$

2-ハンドルが生じる。

(5)

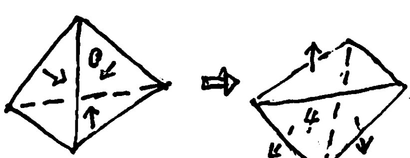


$t-\varepsilon$ $t+\varepsilon$

2-ハンドルが生じる。$G(0,t-\varepsilon)$は$G(0,t+\varepsilon)$になると，二つの領域に分離する。

(6) (5)の図においてすべての矢印(→，⇒)が逆になると，3-ハンドルが生じる。(5)の右図の$G(3,t+\varepsilon)$が(6)では3-球($G(0,t-\varepsilon)$)となり，$t+\varepsilon$で消えるので，3-ハンドルが生じる。

(7)



$t-\varepsilon$ $t+\varepsilon$

臨界値tに4重点があり，$G(0,t-\varepsilon)$は4面体で4面の矢印がすべて内向きなら3-ハンドルとなる。それ以外の4重点はハンドルでない。

(8)

$t-\varepsilon$ 分岐曲線像 $t+\varepsilon$

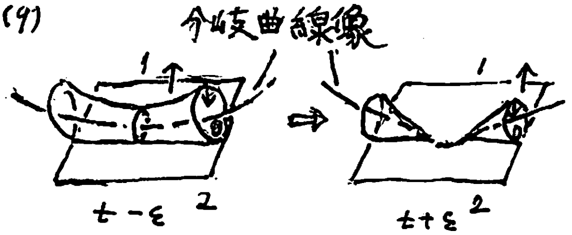
臨界値tに分岐曲線の極大点の像があるとき3-ハンドルが生じる

例

$t-\varepsilon$ 分岐曲線像 $t+\varepsilon$

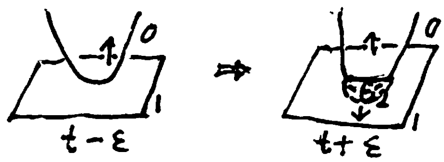
tに分岐曲線の極大点の像があっても，図のような場合は$G(0,t-\varepsilon)$と$G(0,t+\varepsilon)$が同相であるから，tは臨界点でない。

(9)



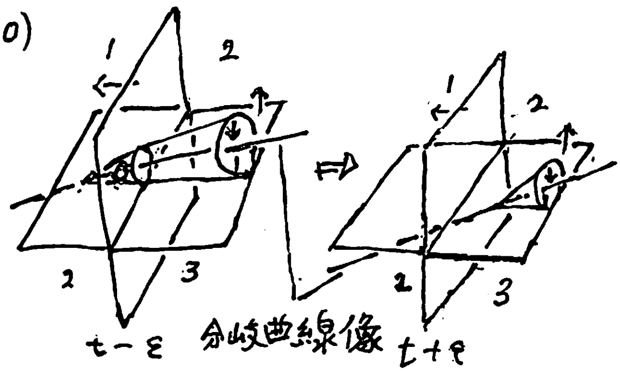
tに分岐曲線の極小点の像がある図のような場合は，2−ハンドルが生じる。

例



分岐曲線の極小点の像があっても図の場合はハンドルは生じない。

(10)



臨界値tで分岐曲線像と交叉曲線が交わる場合に，3−球の$G(0,t-\varepsilon)$が消えるので，3−ハンドルが生じる。

Proposition 2の証明終り

$G(0,t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$が単調に縮小することが非常に大切である。M^3がホモトピー3−球面の場合はheight function $h: S^3\to[0,1]$をS^3のambient isotopyで修正して，$\tilde{h}: M^3\to[0,\alpha]$のハンドルをキャンセルし，臨界値を$0,\alpha$のみにし，0で0−ハンドル，$\alpha$で3−ハンドルを生じさせることを目標とする。

参考文献

〔1〕本間龍雄：幾何学的トポロジー，共立出版（21世紀の数学）1999.

〔2〕本間龍雄：折返しをもたない良い写像について，HAKONE SEMINAR Vol. 16, 2000.