

折返しをもたない良い写像  $f: S^3 \rightarrow M^3$  は?

## 本間龍雄

題名は「 $2$ -fold た分岐曲線を持つ分岐被覆写像  $f: S^3 \rightarrow M^3$  は?」と同じである。 $M^3$  を有向閉 $3$ -多様体とする。 $S^3 = \mathbb{R}^3 + \{\infty\}$  と見なして, height function  $h: S^3 \rightarrow [0, \infty]$  を  $S_t = h^{-1}(t)$ ,  $0 < t < \infty$ , が等高球面 ( $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ ),  $h^{-1}(0) = 0$  (原点),  $h^{-1}(\infty) = \infty$  (無限遠点) がそれを南北極, 北極と南極となるように定める。分岐曲線  $L = \{l_1, \dots, l_n\} \subset \mathbb{R}^3$  は link で有限個の極大点, 極小点をもち, それ等の各々の高さは異なるものとする。既に箱根セミナーで  $\deg f = 2$  の場合は Smith の定理, 予想を用いると  $L$  は自明な結び目  $\ell$  となるので,  $M^3$  は  $S^3$  と同相となることを示した。今回は Smith の定理, 予想を使わずに同様な結果を示そうとしたが未だ成功していない。その方針を述べると共に最近見出した新しい道具を紹介する。これら等の手法は  $\deg f > 2$  の場合にも有効であると思う。

$\deg f = 2$  とすると, 同相写像  $g: S^3 \rightarrow S^3$  が存在し,  $g^{-1} = g$  ( $g$  は  $S^3$  の involution) で,  $f \circ g = f$ , 「 $f$  の分岐点  $p$  で  $g(p) = p$ , 正則点(分岐点以外の点)  $p$  は  $g(p) \neq p$  となる。 $\widetilde{S}_t = g(S_t)$  とおくと,  $\{\widetilde{S}_t\}, 0 < t < \infty$ , は isotopy と見なせる。 $\deg f > 2$  の場合も  $\widetilde{S}_t = cl(f^{-1}(S_t) - S_t)$  とおくと同様な議論が成立するが, この paper では  $\deg f = 2$  の条件のもとで述べる。一般的の位置の議論  $X$  土台となつていい。 $0, \infty$  は正則点で,  $g(0) = \infty, g(\infty) = 0$  としてよい。 $t$  が十分小さいときは  $S_t$  は  $\widetilde{S}_t$  の内部にあり,  $t$  が十分大きいときは  $\widetilde{S}_t$  が  $S_t$  の内部にあり, 従って  $t$  が十分小さいとき,  $t$  が十分大きいときは  $S_t$  と  $\widetilde{S}_t$  は交わらない。 $S_t \cap \widetilde{S}_t$  を支叉曲線,  $\bigcup S_t \cap \widetilde{S}_t$  を支叉曲

面と呼ぶ。有限個の臨界値  $\{t_1, \dots, t_m\}$  を除いて  $S_t \cap \tilde{S}_t$  は有限個の閉曲線で、各臨界値  $t_i$  に交叉曲面の臨界点（極大点、鞍部、極小点） $p_i \in S_{t_i} \cap \tilde{S}_{t_i}$  が存在する。

$S^3, S_t, \tilde{S}_t$  には向きが入っているから、 $S_t, \tilde{S}_t$  の各点の normal vector には正の方向（その増加する方向）が定まる。交叉曲面の臨界点  $p_i (\in S_{t_i} \cap \tilde{S}_{t_i})$  において、 $\tilde{S}_{t_i}$  の normal vector の正の方向と  $S_{t_i}$  の normal vector の正（負）の方向と一致するとき、 $p_i$  を プラス型（マイナス型） 臨界点と呼ぶ。今岐曲線の極大点、極小点、鞍部 臨界点であるが、すべてマイナス型である。図2は  $S_t$  は平面的で、 $\tilde{S}_t$  は曲面的に画く。矢印は正の normal vector を表す。 $S_t$  の矢印は常に上向きで、 $\tilde{S}_t$  の臨界点における矢印が上向きのときはプラス型で、下向きのときはマイナス型である。同じ型どうしの臨界点（極点と鞍部）左順に cancel してゆき、すべての臨界点を解消できるつもりであるが、証明はまだ成功していない。図2'は  $a$  は臨界値、 $p$  は  $a$  における臨界点である。

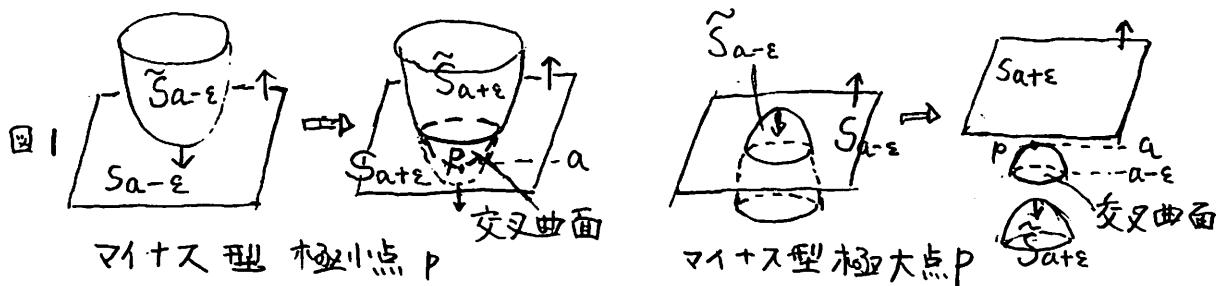
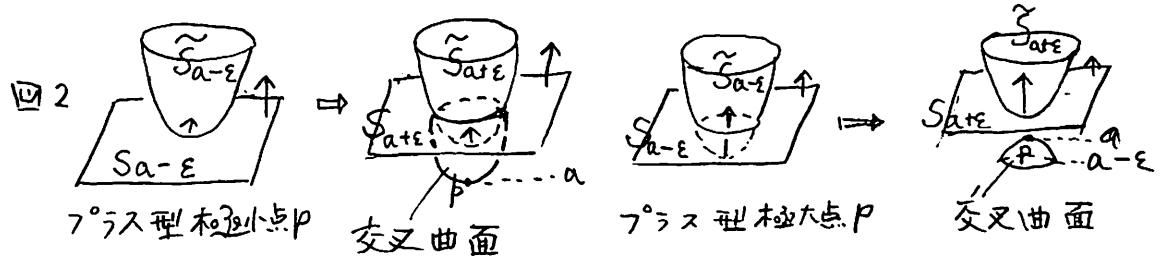


図1は正則点  $p$  がマイナス型極点の場合である。 $B_t = h((0, t))$ ,  $g(B_t) = \tilde{B}_t$  とおいて、交叉曲面は  $B_{a+\epsilon} \cap \tilde{B}_{a-\epsilon}$  にある部分のみ画いた。右の図2'交叉曲面が  $S_{a+\epsilon}, \tilde{S}_{a-\epsilon}$  から分離しているのはそのためである。図2は正則点  $p$  がプラス型極点の場合である。 $S_t, \tilde{S}_t$  の normal vector の大きさが極小点と極大点で異なること注目してほしい。



正則点 $p$ が交叉曲面の鞍部となる場合もマイナス型、 $\gamma$ ラス型である。(図3) 図が複雑にならざり、交叉曲面は別に画いた。

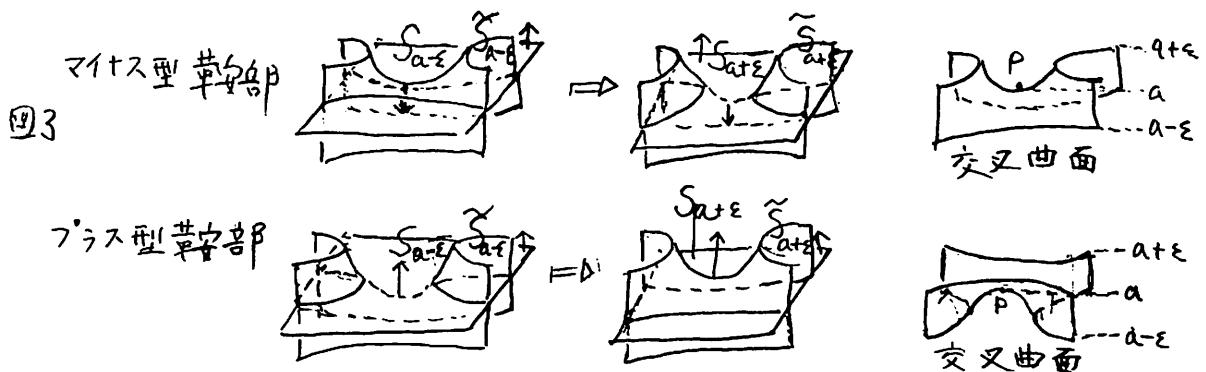
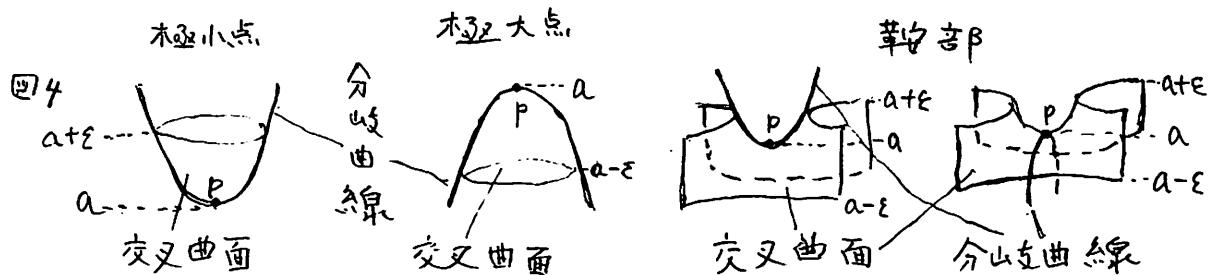


図4は分岐点 $p$ が臨界点の場合で、すべてマイナス型で、 $p$ が交叉曲面の極小(大)点の場合は分岐曲線の極小(大)点であり、交叉曲面の鞍部の場合は分岐曲線の極小点または極大点である。分岐曲線は交叉曲面上に含まれる。図4では交叉曲面と分岐曲線の両方を画く。



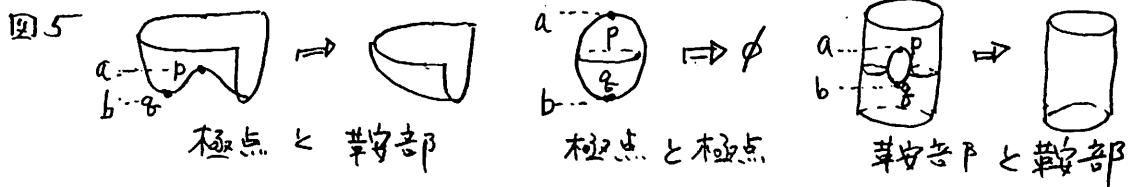
$\deg f = 2$  の場合に  $M^3$  が  $S^3$  と同相であることを証明するためには臨界値を交換して残りあつた臨界点 $a, b$  ( $a$  と  $b$  の間には正臨界値は存在しない) を川貞に cancel してい。

[4]

4

臨界値  $a, b$  における臨界点をそれぞれ  $p, q$  とする。図5は  $p, q$  を cancel する図である。図の曲面は交叉曲面である。

### 臨界点のcancel



$\deg f = 2$  の場合、交叉曲面  $\cup S_t \cap \widetilde{S}_t$  のみを考察すれば十分と最近まで考えてきたが、isotopy  $\{\widetilde{S}_t\}$ ,  $0 < t < \infty$ , の構造を調べるために  $S_t \cap \widetilde{S}_t$ ,  $0 < t, t' < \infty$ , の性質を知る必要を感じた。isotopy  $\{\widetilde{S}_t\}$  の臨界点は  $S_t$  が  $t_1$  で動くとき極点と革部が同時に生じる点であり、MS点と呼ぶことにする。MS点は有限個である。MS点は分歧曲線に含まれない、即ち正則点である。またMS点  $p'$  は  $S_{t'} \cap \widetilde{S}_{t'}$  (=含まれる) であり、 $t' \neq t$  であり、MS点  $p_1, p_2$  が  $p_1 \in S_{t_1} \cap \widetilde{S}_{t_1}, p_2 \in S_{t_2} \cap \widetilde{S}_{t_2}$  ならば、 $t_1 \neq t_2$ ,  $t_1 \neq t_2$  である。

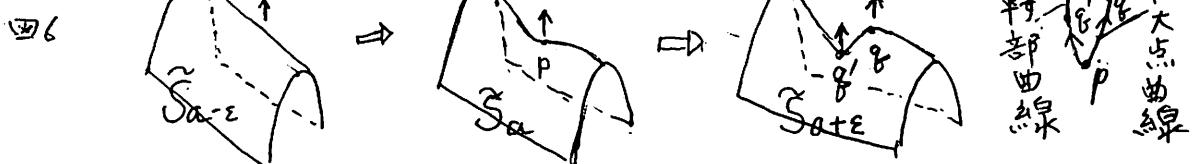


図6はプラス型MS点  $p$  の近傍の図である。 $a$  は臨界値である。 $S_t$  は平面状であるが描いてない。 $S_{a-\epsilon}, S_a, S_{a+\epsilon}$  は  $p$  の近傍で互いに交わらない。プラス型であるから矢印は上向きである。 $p$  から極大点  $q$  と革部  $q'$  の軌跡の曲線をそれを極大点曲線、革部曲線と呼ぶ。MS点、極点曲線、革部曲線は isotopy  $\{\widetilde{S}_t\}$  の構造に

深くかかかっていふ。MS点の標準形を  $\mathbb{R}^3$  の原点  $O$  の近傍で示すヒン久のような式  $t' = \varepsilon(x, y, t) = 0$  になら。原点  $O$  の近傍の式

プラス型 Max-Sad 点.  $x^3 - tx + t - y^2, x^3 + tx + t - y^2 \cdots (1)$

プラス型 Min-Sad 点.  $x^3 - tx + t + y^2, x^3 + tx + t + y^2 \cdots (2)$

マイナス型 Max-Sad 点.  $x^3 - tx - t - y^2, x^3 + tx - t - y^2 \cdots (3)$

マイナス型 Min-Sad 点.  $x^3 - tx - t + y^2, x^3 + tx - t + y^2 \cdots (4)$

なの  $t' = \varepsilon(0, 0, 0) = 0$  となつて  $t' \neq t$  に立すが、式を簡明にするために原点の近傍の式とした。(1), (2), (3), (4) の左(右)の式は  $tx$  の符号が $- (+)$ となつてゐるが、この MS 点で極点曲線、鞍部曲線が生じる(消える)ことを示していふ。 $t$ の符号の $+ (-)$ はプラス(マイナス)型を示し、 $y^2$ の符号の $- (+)$ は Max-Sad (Min-Sad) 点であることを示している。 $\deg f > 2$  の場合は MS 点以外の臨界点が存在する。

### 参考文献

本間龍雄他, 幾何学的トポロジー, 共立出版 (21世紀の数学) 1999.