HAKONE SEMINAR 15 (1999) 1-6.

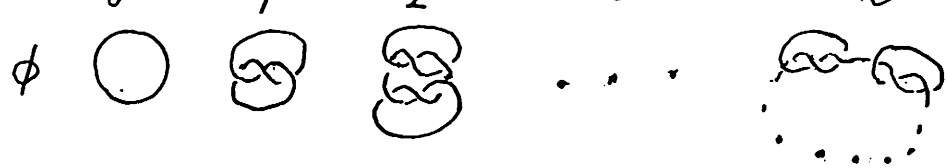
折返しのない良い写像 $f: S^3 \to \tilde{S}^3$ の一例

本間 龍雄

次の予想が成立すれば3次元Poincaré予想は肯定的に解決する。

予想　M^3は有向閉3-多様体，$f: S^3 \to M^3$が写像度 $\deg f \neq 0$ の連続写像であれば，被覆写像 $g: S^3 \to M^3$が存在する。

fは良い写像としてよい。さらにfのsingularityは折返しをもたないと仮定する。即ちfのsingularityは分岐曲線のみとなる。$f: S^3 \to M^3$の分岐曲線はS^3のlinkであるが，このlinkは自明であると期待している。本稿で分岐曲線はS^3の自明な結び目Lで，M^3は3-球面$\tilde{S}^3$，$f(L)$は$\tilde{S}^3$のk個 ($k \geqq 0$) のtrefoil knotの連結和となる例を示す。



k		0	1	2	・・・	k
f(L)	ϕ				・・・	
deg f	1	2	3	4	・・・	k+2

図 1

$f^{-1}(f(L))$の図 ($\deg f = 3$)

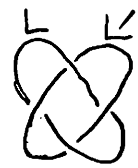


図 2

Lは分岐曲線で図5, 6, 7, 8, 9, 10の分岐点a', b'のたどった道，L'は$S_t - L$の二点c', d'のたどった道である。

$h: S^3 \to [0,1]$はS^3のheight functionで，$h^{-1}(0) = n$, $h^{-1}(1) = s$，$0 < t < 1$においてS_tは等高球面，$h^{-1}([0,t]) = B_t$は3-球である。S_tに有限個の分岐点 (LとS_tの交点) があり，それ以外のS_tの点では$f(S_t)$がその点における正の法ベク

トル（図の矢印）の方向に進む。

3-球面 $\tilde{S}^3$ は無限遠点 ∞ を除いて $R^3=\tilde{S}^3-\{\infty\}$ とみなし，R^3 に直交座標 $p=(x,y,z)$ を入れ，$z(p)$ を p の高さとする。$f(S_t)$，$f(L)$ の構造は z 軸に垂直な平面を用いて調べることが多い。

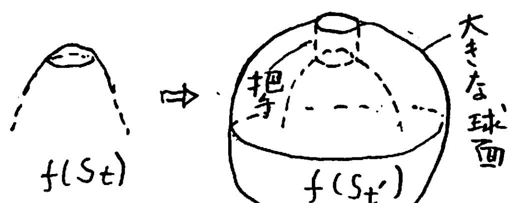
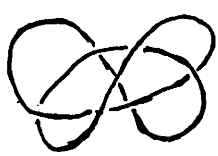


図 3

$f(S_t)$ が無限遠点 ∞ を通過して $f(S_{t'})$ $(t<t')$ となるときは，図3のように $f(S_t)\cup f(L)$ を囲む大きな球面を $f(S_t)$ に把手で連結して $f(S_{t'})$ となるものと考える。



$f(L)$ $(\deg f=3)$

図 4

本稿では主に図1の $\deg f=3$ の場合を扱う。図4は trefoil knot で図1の $\deg f=3$ の場合の trefoil knot を R^3 の ambient isotopy で変形してある。S^3 の等高球面 S_t の像 $f(S_t)$ と $f(L)$ との関係を見易くするためこのように変形した。$f(S_t)$ は R^3 の自己交叉をもつ曲面であり，しかも $f(L)$ と4交点 a, b, c, d をもつので画くのが難しい。$f(S_t)$ の輪郭は細線，$f(L)$ は太線，$f(S_t)$ の自己交叉曲線は点線で画き，これ等の曲線が図上で交わるときは，交点の近傍で遠くの線を画かないので，$f(S_t)$，$f(L)$，自己交叉曲線の各部分における遠近を注意深く見てほしい。

S_t の各点に対し正の法ベクトルの方向（B_t の反対側の方向）が定まり，従って $f(S_t)$ の分岐点像 a, b 以外の点では正の方向が定まるので，それを矢印で示してある。$\tilde{S}^3-(f(S_t)\cup f(L))$ の各点 p で $f|B_t : B_t\to\tilde{S}^3$ の幾何的写像度 $\lambda\geq 0$ が定まり，p の十分小さい近傍で一定なので，B_t は p に入

重で写像されているということにする。λはtが増加するに従って単調に増加する。

$0<t_1<t_2<t_3<t_4<1$ の4つの時刻に $f(S_t)$ は変化する。$f(n)=f(s)=\infty$ で, $0, t_1, t_2, t_3, t_4, 1$ 以外の t において $f(S_t)$ は R^3 の ambient isotopy で動く。$0<t<t_1$ $(t_4<t<1)$ において $f(S_t)$ は単調に縮小(拡大)する球面で, $f(S_t)$ の外部では $f|B_t$ は 1 (2) 重, 内部では 0 (3) 重である。分岐曲線 L は自明な S^1 で, t_1, t_4 は L の極点で, $t_1<t<t_4$ において S_t は L と2点 a', b' で交わり, $f(a')=a$, $f(b')=b$ である。さらに $L-S_t$ の2点 c', d' と S_t-L の2点 c'', d'' が存在し, $f(c')=f(c'')=c$, $f(d')=f(d'')=d$, $f(S_t)\cap f(L)=\{a,b,c,d\}$ をみたす。

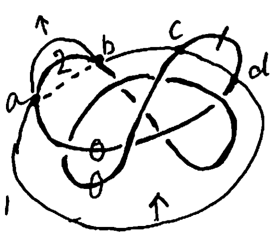


図 5

図5は $t_1<t<t_2$ における t_1 の直後の $f(S_t)$ の図である。a, b は分岐点 a', b' の像で a と b 結ぶ点線は $f(S_t)$ の自己交叉曲線で, 長球状の0重領域となめくじ状の2重領域が接している。0重領域は縮小しつつあり, 2重領域は拡大している。外部は $f|B_t$ の1重領域である。$f(L)$ は0重領域のの弧 ad, bc, 1重領域の弧 cd, 2重領域の弧 ab に分かれる。

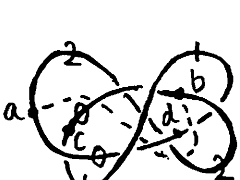


図 6.1

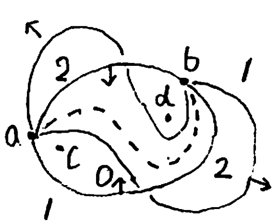


図 6.2

図6は $t_1<t<t_2$ における t_2 の直前の図であり, 一所に画くと見難くなるので図6.1では $f(L)$ を, 図6.2では $f(S_t)$ の輪郭を画いた。図5より長球状の0重領域は小さくなり, なめくじ状の2重領域は大きくなって

長球の向う側に交叉曲線で貼りついている。2重領域の$f(L)$の弧abと1重領域の$f(L)$の弧cdは図5より長くなっている。

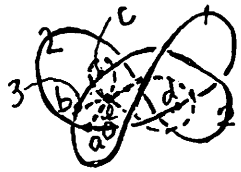


図 7.1

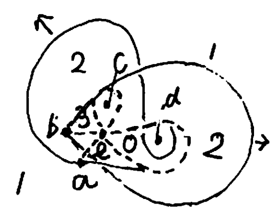


図 7.2

t_2で$f|B_t$の3重領域が生じ，t_3で0重領域が消える。図7は時刻t_2の直後の図で3重領域はbを頂点とする錐状で底面の周は交叉曲線のループで底面の中にcがあり，0重領域もaを頂点とする錐状で底面の周は交叉曲線のループで中にdがある。0重領域は図6では長球状であったが，ここでは錐状になりかつ縮小している。t_2で$b=c$となり，以後交叉曲線の3重点eが生じるが，eは$f(S_t)$の3重点でもある。またt_2以後$f(L)$上でbとcの順序が逆転している。

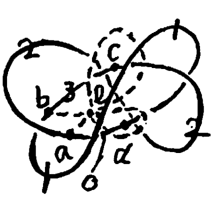


図 8.1

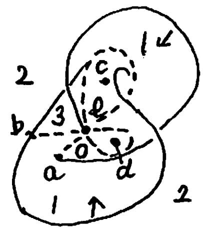


図 8.2

t_3で$f|B_t$の0重領域が消えるが，図8はt_3の直前の図で図7から図8に至る間に$f(S_t)$の1重領域と2重領域の境界面が無限遠点を通過している。これは図3の操作により確認する。図7では2重領域が有界で，1重領域が∞を含んだが，図8では1重領域が有界で，2重領域が∞を含んでいる。bを頂点とする錐状の3重領域は拡大し，aを頂点とする錐状の0重領域は縮小してt_3で消える。

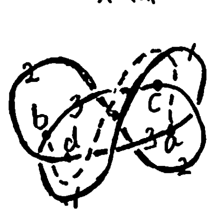


図 9.1

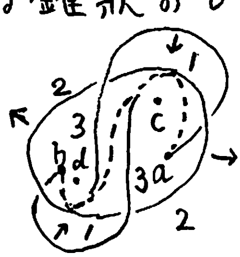


図 9.2

t_3で$f|B_t$の0重領域が消え，t_4で1重領域が消えるが，$t_3<t<t_4$において$f(S_t)$はR^3のambient isotopyで動く。図9はt_3の直後の図で1重領域は

なめくじ状になって縮小しつつある。3重領域は t_3 以前錐状であったのが t_3 以後長球状になり拡大する。t_3 で $a=d$ となり，a と d の $f(L)$ における順序は逆転し，3重点 e は消える。

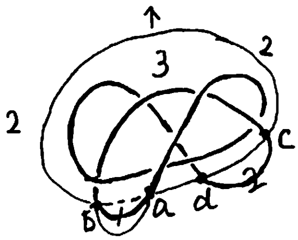
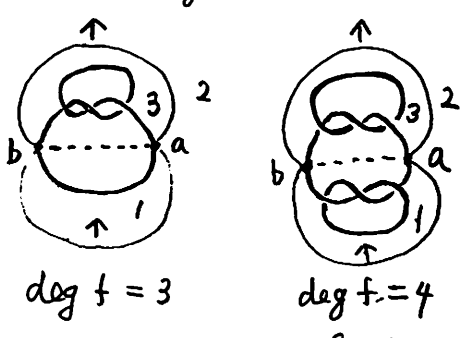


図10

t_4 でなめくじ状の1重領域が消える。図10はその直前の図である。t_4 以後は $f(S_t)$ は球面で拡大を続け，$t=1$ で無限遠点 $\infty = f(S)$ に収束する。以上で $f: S^3 \to \tilde{S}^3$ は完成する。$\tilde{S}^3 - f(L)$ の各点の f の幾何的写像度はすべて3である。例えば $f^{-1}(\infty)$ は n, s と $t_2 < t < t_3$ において $f(S_t)$ が ∞ を通過するときの S_t の一点 p $(f(p)=\infty)$ の三点である。もちろん f の(代数的)写像度 $\deg f$ は3である。



$\deg f = 3$　　$\deg f = 4$

$k=1$　　$k=2$

図11

図11は f の写像度 $\deg f$ と連結和における trefoil knot の個数 k の関係を示す図である。

$k=1$ の場合は図10と殆んど同じで，点 c, d は既に3重領域の拡大により消えている。

$k=2$ の場合は点 $\tilde{c}, \tilde{d}$ が生じ，続いて a を頂点とする錐状の $f|B_t$ の4重領域が生じて，1重領域に入っている $f(L)$ の弧が trefoil 型であることが示される。$k=1$ の場合の 0, 1, 2, 3 重領域と a, b, c, d に代って，それぞれ 1, 2, 3, 4 重領域と $a, b, \tilde{c}, \tilde{d}$ が動き，$k=2$ の場合が終る。この操作を inductive に繰り返して，$f(L)$ が k 個の trefoil knot の連結和で $\deg f = k+2$ の場合を得る。

〔6〕

折返しのない良い写像 $f: S^3 \to \tilde{S}^3$ で、分岐曲線 L の像 $f(L)$ が本例と異なる結び目があるかどうか研究中である。

参考文献

本間龍雄他、幾何学的トポロジー、共立出版（21世紀の数学）1999.