

折返しをもたない良い写像 $f: S^3 \rightarrow M^3$
 本間 龍雄

良い写像 $f: S^3 \rightarrow M^3$ の singularity を解消する方法を研究
 中である。Singularity が解消できれば 普遍被覆 $g: S^3 \rightarrow$
 M^3 が存在する。さらに M^3 が単連結ならば g は同相写像とな
 るので M^3 も S^3 となり, 3次元 Poincaré 予想は解結する。

当面の目標は折返しをもたない良い写像 (Singularity は分
 岐曲線のみ) $f: S^3 \rightarrow M^3$ の場合である。即ち f は分岐被覆であ
 る。この paper では f と S^3 の height function $h: S^3 \rightarrow [0, 1]$
 の対 $\{f, h\}$ に標準型を定義し, 標準型が構成できれば分
 岐曲線が解消できることをまず示す。

標準型 $\{f, h\}$ を構成するのは易しくないが, 与えられた
 height function $h: S^3 \rightarrow [0, 1]$ の等高球面 $S(t) = h^{-1}(t)$, $0 < t < 1$,
 の像 $f(S(t))$ を M^3 の中で一般の位置におき, 有限個の臨界値
 とそれに対応する臨界点 $f(p) \in f(S(t))$ を定義する。続いて臨
 界値の川原序の交換, 臨界点の cancel 等により標準型にたど
 りつくり積りである。これはまだ完成していないが, その道筋の計画
 を最後に示したい。

M^3 を向きのついた 3次元多様体, $f: S^3 \rightarrow M^3$ を折返しをも
 たない良い写像とすると, $\deg f \neq 0$ であるから $\deg f > 0$ とし良い。
 $L_1, \dots, L_\ell \subset S^3$ を f の分岐曲線とする。 $h: S^3 \rightarrow [0, 1]$ は
 height function で, $h^{-1}(0) = \pi$ は北極, $h^{-1}(1) = S$ は南極で
 $h^{-1}(t) = S(t)$ ($0 < t < 1$) を等高球面とする。

定義 $\{f, h\}$ が標準型であるとは

- (1) $0 < t_1 < \dots < t_\ell < 1$ が存在し, $S(t_i) \cap L_i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, \ell$

(2)

(2) L_i の各点を不動点とする $S(t_i)$ の involution λ_i が存在し, L_i を境界とする $S(t_i)$ の二つの disk を D_i, D'_i とすると

$$\lambda(D_i) = D'_i, f \circ \lambda_i = f|_{S(t_i)}, i=1, \dots, l.$$

命題 $\{f, h\}$ が標準型であれば, 被覆写像 $g: S^3 \rightarrow M^3$ が存在する。

証明 $S(t_1), \dots, S(t_l)$ によつて分割された S^3 の $l+1$ 個のココンパクト多様体を N_1, \dots, N_l とする。ただし, $\partial N_1 = S(t_1), \partial N_{l+1} = S(t_l), \partial N_i = S(t_{i-1}) \cup S(t_i), i=2, \dots, l$ 。図1は一次元低い図なので, $N_i (i=2, \dots, l)$ は annulus N_1, N_{l+1} は disk となり, $S(t_i)$ 上の \Rightarrow の黒

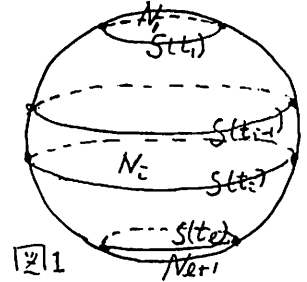


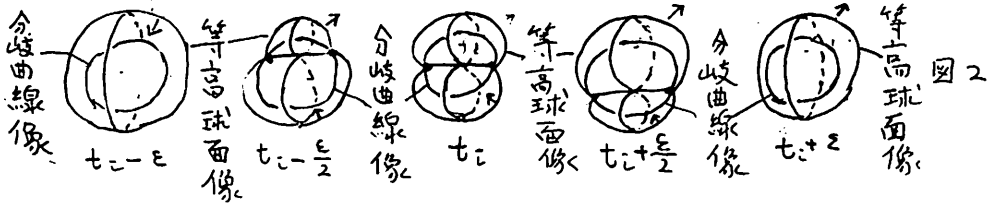
図1

点は分岐曲線 L_i のつもりで"ある。involution λ_i を用いて D_i と D'_i を貼り合わせると, 標準型の定義の条件(2)より, N_1, \dots, N_{l+1} が $l+1$ 個の3-正柱面 S^3_1, \dots, S^3_{l+1} が生じる。貼り合わせにより N_i から S^3_i への連結写像 $\mu_i: N_i \rightarrow S^3_i (i=1, \dots, l+1)$ ができ, $\mu_i|_{S(t_i)} = \mu_i \circ \lambda_i (i=1, \dots, l), \mu_i|_{S(t_{i-1})} = \mu_i \circ \lambda_{i-1} (i=2, \dots, l+1)$ を満たす。また $\mu_i|_{S(t_i)} = \mu_i(D_i) = \mu_i(D'_i)$ は disk D''_i で, $\mu_i|_{D_i}: D_i \rightarrow D''_i, \mu_i|_{D'_i}: D'_i \rightarrow D''_i$ は同相写像 ($i=1, \dots, l$), $\mu_i|_{\text{int } N_i}$ は1対1の写像である。

$g_i: S^3_i \rightarrow M^3$ の写像を S^3_i の各点 p_i に対し, $g_i(p_i) = f(\mu_i^{-1}(p_i))$ とおくと, involution λ_i と貼り合わせ写像 μ_i の定義より g_i は被覆写像となる。 ($i=1, \dots, l+1$) 証明終り

標準型 $\{f, h\}$ を作るためには一般の位置の議論を用いる。height function の等高球面 $S(t)$ の像の曲面 $f(S(t))$ が横断的に交わることを一般の位置という。ただし皮肉なことに

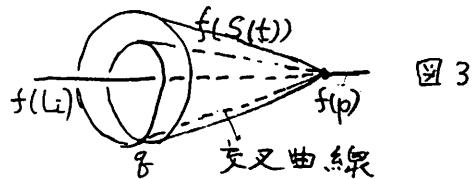
標準型 $\{f, h\}$ では t_1, \dots, t_2 に於て一般の位置でなく, $f(S(t_i))$ は $S(t_i)$ が $disk_i =$ 重写像されたものがさらに写像されていて, $f(S(t_i))$ は横断的に交わる曲面とは言えない。図2は命題の証明の $D_i^2 = M_i(S(t_i))$



を ϵ -homotopy で一般の位置に修正したもので球面が $t_i - \epsilon \leq t \leq t_i + \epsilon$ の向に変化する状態を表わした図である。分岐曲線の二つの黒点を結ぶ線分が交叉曲線で, ここで曲面は横断的に交わっている。交叉曲線の合併集合を交叉曲面と呼ぶが, 図2の交叉曲面が標準型の $D_i^2 = M_i(S(t_i))$ になる。このように交叉曲線及び交叉曲面が重要である。

予想 $f: S^3 \rightarrow M^3$ が折返しをもたない良い写像であれば, height function $h: S^3 \rightarrow [0, 1]$ が存在し, $\{f, h\}$ は標準型となる。

この予想の出発点は, h を修正して $f(S(t))$ と $f(L_i)$ の交点 $f(p)$ ($p \in S(t) \cap L_i$) の近傍において一般の位置にすることである。交点以外では $f(S(t))$ は滑らかである。交点 $f(p)$ の近傍のようすを示す代表的な図が図3である。



p の $disk$ 近傍の境界(閉曲線)の像は8の字(8で交わっている)となる。図の $f(p)$ と q を結ぶ線分が交叉曲線である。交叉曲線には, $f(L_i) \cap f(S(t))$ の二点を結ぶものと, 閉曲線となるものの二種類ある。

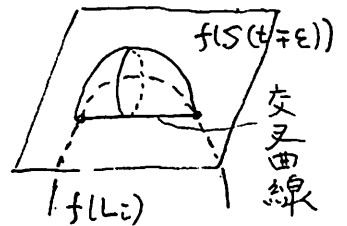
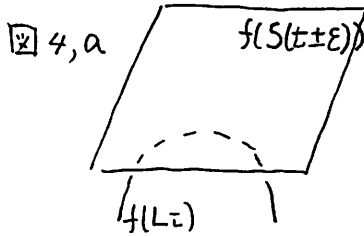
(4)

るが、 $f(L_i)$ と $f(S(t))$ の交点と $f(L_j)$ と $f(S(t))$ の交点 $(i \neq j)$ を結ぶ交叉曲線は存在しないことは証明しないといけない。もちろん $f(L_i)$ 上の二点を立端点とする交叉曲線が重要である。

$f(S_t)$ の臨界点 $f(p)$ と臨界値 t の説明をする。まず臨界

点 $f(p)$ ($p \in S_t$)
が $f(L_i)$ にある場合である。

図4, aでは
 $t \pm \varepsilon, t \mp \varepsilon$ の図
を画いているが、



臨界点 $f(p)$ で $f(S(t))$ と $f(L_i)$ が接して、 $f(L_i)$ 上に端点をもつ交叉曲線が生じたり、消えたりする。図2の $f(L_i)$ はこのタイプの臨界点を二つもつだけである。標準型に修正するためには

このタイプ以外の
の臨界点をす
べて解消する。

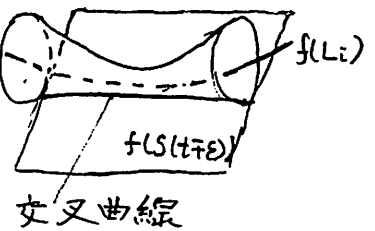
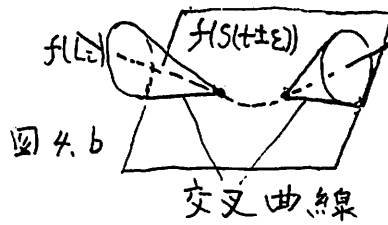
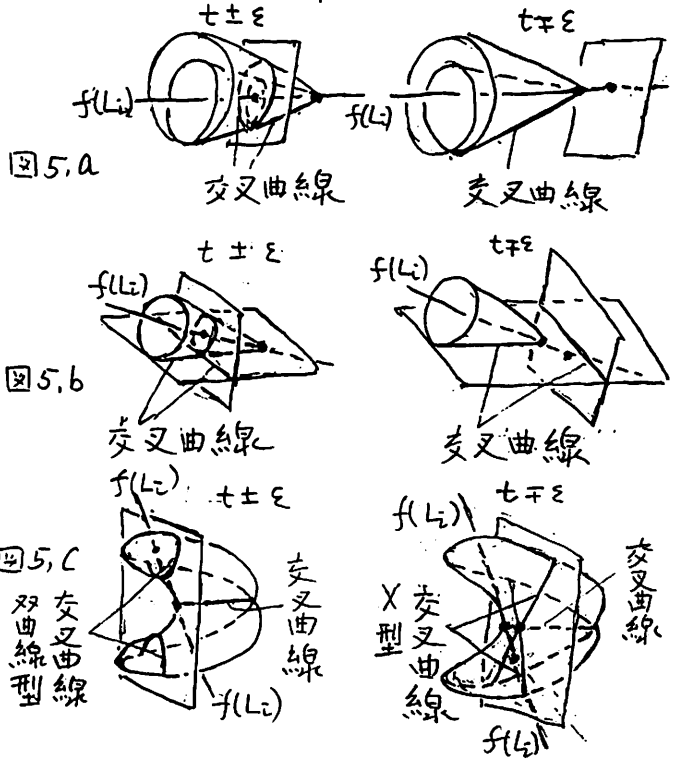


図4, bは交叉
曲線の立端点

が消えてそこで交叉曲線がなくなるかまたはその逆の場合である。端点をもつ二つ(→)の交叉曲線が立端点をもつ一つ(=)の交叉曲線になる場合と、端点をもつ一つの交叉曲線が交叉曲線になるかその逆の場合がある。臨界点の $f(p)$ で $f(S(t))$ と $f(L_i)$ が接することは図4, bも図4, aと同じである。

$p \in S(t) \cap L_i$, $q \in S(t)$, $p \notin L_i$ であり、 $f(p) = f(q)$ が臨界点となる場合は図のようになる。図5, aでは p を含むシート $S(t)$ の像は臨界点 $f(p) = f(q)$ を通過した後 ($t \pm \epsilon$) で交叉曲線をまたがない。図5, bでは $t \pm \epsilon$ に於て交叉曲線が分離する。図5, cでは双曲線型の交叉曲線がX型に変化する。一つのシートと $f(L_i)$ の交点が上(下)の位置から下(上)の位置に変わる。



$f(L_i)$ 上にない臨界点 z は $f(S(t))$ の滑らかなシートどうしが交わるが、二重点、三重点、四重点の場合がある。



図6は $f(S(t))$ の二重点の臨界点である。図6, aの臨界点は交叉曲面の極点となっており、図6, bの臨界点は交叉曲面の鞍点となっている。

(6)

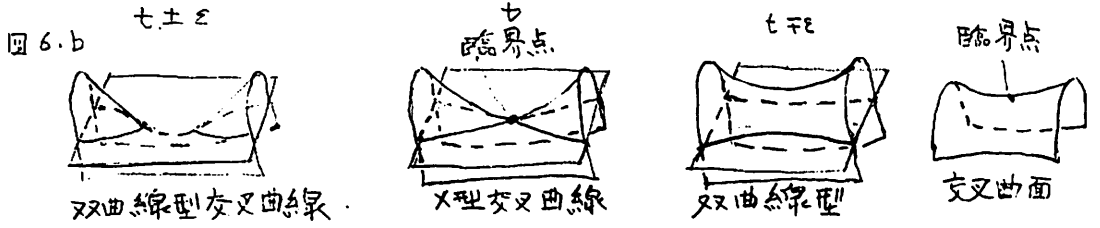


図7は三重点の臨界点の図である。 $t, t \neq \epsilon$ には複雑さをさせて、交叉曲線のみ画いた。

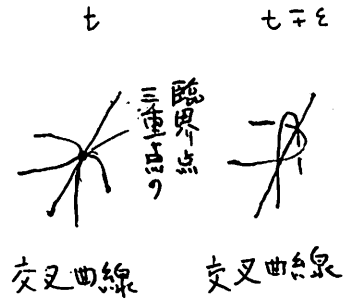
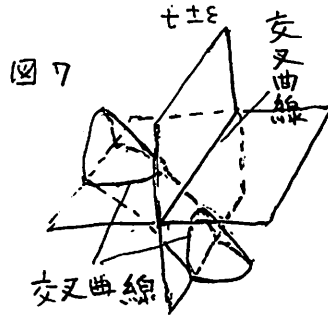
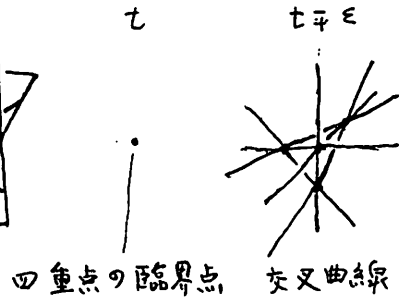
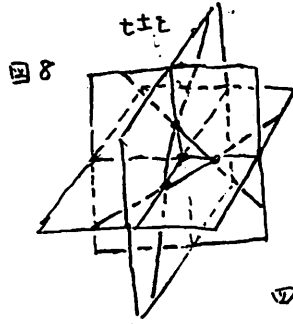


図8は四重点の臨界点の図で、 $t \neq \epsilon$ は臨界点のみ $t \neq \epsilon$ では交叉曲線のみを画いた。四重点の臨界点のた



かに分岐曲線 L_1, \dots, L_n の順序を決定するとき重要な役を果すものがある。 $t \pm \epsilon$ では $f(S(t \pm \epsilon))$ の一つのシートは画かないで、交叉曲線のみ画いた。

与えられた折返しをもたない良い写像 $f: S^3 \rightarrow M^3$ に対し、 $\{f, h\}$ が標準型となる height function $h: S^3 \rightarrow [0, 1]$ を作るこゝが目標である。最初に与えられた height function h は標準型とは縁の遠いものであるが、分岐曲線像 $f(L_i)$ を境界

とする交差曲面 $T \subset M^3$ が存在し、 T が自身が自己交差する複雑な形をしているが、標準型 $\phi(S(t;))$ に対応する。 T_1, \dots, T_2 上にあるさまざまな臨界点を解消し、各 T_i に対し $4, \alpha$ のタイプ α の臨界点 (図 2 参照) のみにしたい。

文献

3次元ポアンカレ予想について, 本間龍雄, 数学, 第42巻, 1号 p.74 ~ p.80 (1990)