

写像<度>0の良いい写像 $f: S^3 \rightarrow M^3$

本間龍雄

つぎのような二つの予想をたてている。

予想1. 写像<度>0の良いい写像 $f: S^3 \rightarrow M^3$ があれば、折返しのない良いい写像(分岐被覆) $g: S^3 \rightarrow M^3$ が存在する。

予想2. 折返しのない良いい写像 $g: S^3 \rightarrow M^3$ があれば、普遍被覆 $u: S^3 \rightarrow M^3$ が存在する。

予想1, 予想2が共に肯定的に解決すれば, S^3 から M^3 への連続写像は π -ホモトピーで良いい写像による近似が可能であるから, 普遍被覆 $u: S^3 \rightarrow M^3$ が存在する。さらに M^3 が単連結ならば, $u: S^3 \rightarrow M^3$ は同相写像となり, $M^3 = S^3$ である。故に3次元ホムカレ予想が成立する。

予想1を解くために β -トリックを中心とするさまざまな道具を工夫してあるので, 本稿の後半でそれ等を紹介する。

予想2は「Smithの予想 + Smithの定理」と同値とみている。折返しのない良いい写像 $g: S^3 \rightarrow M^3$ が与えられたとして, S^3 の height function $h: S^3 \rightarrow [0, 1]$ ($h^{-1}(0) = S$, $h^{-1}(1) = \alpha$ は共に一点, $h^{-1}(t)$, $0 < t < 1$ は 2-球面) を修正して, g の分岐曲線 B_1, B_2, \dots, B_k ($k+1$ が g の写像<度>) を k 個の 2-球面 $h^{-1}(t_1), h^{-1}(t_2), \dots, h^{-1}(t_k)$ ($0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < 1$) にのせることが可能と考えている。

良いい写像は被覆写像の一種であるとも言える。分岐被覆は singularity として分岐曲線をもつ被覆写像であるように, singularity が折返し曲面と分岐曲線である被覆が良いい写像であると言って良い。良いい写像 $f: S^3 \rightarrow M^3$ が

与えられたとき、 f の折返し点 p では p の近傍 V_p が存在し、 $f|_{V_p}: V_p \rightarrow f(V_p)$ は p を通る折返し面に属する面対称な二点が $f(V_p)$ の一点に写像され、 f の分岐点 p では p の近傍 V_p が存在し、 $f|_{V_p}: V_p \rightarrow f(V_p)$ は p を通る分岐線に属する線対称な二点が $f(V_p)$ の一点に写像される。このように良い写像は局所的に対称性を保つ性質である。 f の局所的対称性と S^3 の対称性を巧みに使って予想1と予想2を解決したい。良い写像 $f: S^3 \rightarrow M^3$ の局所的対称性から全局的対称性を導くために、 f の折返し球、分岐球、折返し分岐球を定義する。

定義1. 3-球 D から M^3 への写像 $g: D \rightarrow M^3$ が局所同相であるとは、 D の任意の点 p に対し、 p の近傍 V_p が存在し、 $g|_{V_p}: V_p \rightarrow g(V_p)$ が同相写像と存在することである。

定義2. D^3 は S^3 の3-球で、 $f: S^3 \rightarrow M^3$ の singularity との交わりは折返し面 F のみで、 $D^3 \cap F$ は D^3 の proper な disk である。 D^3 から半球 D への写像 $h: D^3 \rightarrow D$ は $D^3 \cap F$ で折返す写像で、 D^3 の $D^3 \cap F$ を境界とする二つの半球は h によりそれぞれ同相に D に写像されている。 $g: D \rightarrow M^3$ は局所同相な写像で $f|_{D^3} = g \circ h$ をみたすとき、 D^3 を f の折返し球と呼ぶ。

定義3. D^3 は S^3 の3-球で、 f の singularity との交わりは分岐曲線 B のみで、 $D^3 \cap B$ は D^3 の proper な自明な弧である。 D^3 から3-球 D への写像 $h: D^3 \rightarrow D$ は $D^3 \cap B$ を軸とする対称点を一点に移す写像である。 $g: D \rightarrow M^3$ は局所同相な写像で、 $f|_{D^3} = g \circ h$ をみたすとき、 D^3 を f の分岐球と呼ぶ。

定義4. D^3 は S^3 の3-球で、折返し分岐点 p を含み、 f の singularity との交わりは折返し曲面 F とは proper な disk $D^3 \cap F$ 、分岐曲線 B とは proper な自明な弧 $D^3 \cap B$ のみである。 D^3 から半球 D への写像 $h: D^3 \rightarrow D$ は $D^3 \cap F$ で折返しと $D^3 \cap B$ を軸として対称点を

一点に移す早像である。 $g: D \rightarrow M^3$ が局所同相な早像で $f|D^3 = g \circ h$ をみたすとき、 D^3 を 折り返し分岐球 と呼ぶ。

予想2を問題とするとき、 S^3 の等高球面 S_t^2 , $0 < t < 1$, に囲まれる3-球 $B_t^3 = h^{-1}([0, t])$ に含まれる分岐球を考察しなければならぬ。

図1は分岐球の最も簡単な例であるが、分岐線 B と S_t^2 が点 p で接し、 $S_{t+\epsilon}^2$ と B が g, γ で

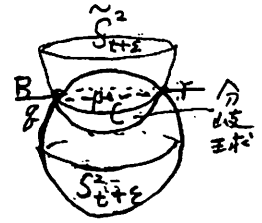


図1 分岐球の例

交わった例である。 $\tilde{S}_{t+\epsilon}^2$ は $f^{-1}(f(S_{t+\epsilon}^2))$ の一部分の曲面で、 $f(\tilde{S}_{t+\epsilon}^2)$ は $f(S_{t+\epsilon}^2)$ の一部分とぴったり重なり、閉曲線 $C = S_{t+\epsilon}^2 \cap \tilde{S}_{t+\epsilon}^2$ の像 $f(C)$ は $f(S_{t+\epsilon}^2)$ の $f(p)$ と $f(\gamma)$ を結ぶ自己交差線となる。 C を境界とする $S_{t+\epsilon}^2$ と $\tilde{S}_{t+\epsilon}^2$ の \Rightarrow の disk に囲まれた3-球が分岐球で g, γ を軸として二重に回転して早像される。 t を動かしながら等高球面 S_t^2 と $f^{-1}(f(S_t^2))$ の \tilde{S}_t^2 (S_t^2 の一部分の f に f を持上げ) に囲まれた領域の閉包として分岐球 (あるいは折り返し球、折り返し分岐球と同様) に作る。

予想2を解決するためには、height function $h: S^3 \rightarrow [0, 1]$ を修正し、等高球面 $S_{t_c}^2$ に分岐曲線の連結成分 B_c の存在を

ばならぬ。 I 上に $S_{t_c}^2$ を直接求めるのではなく、 B_c を向にばさむように $S_{t_c+\epsilon}^2$ と $S_{t_c-\epsilon}^2$ を探し、 $S_{t_c-\epsilon}^2$ と $S_{t_c+\epsilon}^2$ を境界とする $S^2 \times I$ が \Rightarrow の分岐球 ($S^2 \times I$ の上と下の部分) の和となる。 $f|S^2 \times I$ は B_c を軸として折線点を一点に移す早像である。

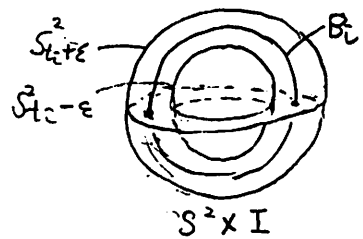
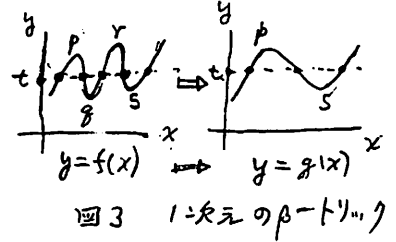


図2 二つの分岐球の和

図2の $S^2 \times I$ を作るためには、図1の S^3 の等高球面上の閉曲線 C を追うべければならぬ。 C は二つの分岐点 g, γ を含み、 C は $f(g)$ と $f(\gamma)$ を結ぶ M^3 の弧 $f(C)$ に二重に早

像される。今後石確めねばならないことは分岐点 q, r は一つの分岐曲線の連結成分 B_i に含まれることであるが、これはホモロジーを使えば良いと思う。あとは S^3 の height function を修正し、 C を合併した点集合の商包が S^2_{reg} となるようにする。以上の二つのことが証明できれば、分岐曲線系 $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ は自明な点集合となり、予想 2 は解決する。

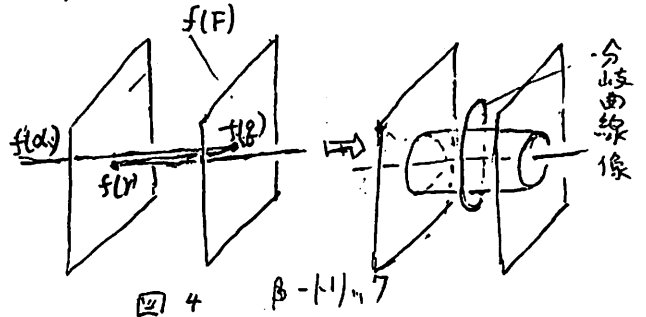
予想 1 を解くためのアイデアは実に単純で、図 3 のように実函数 $y = f(x)$ の隣り合う極小点 q と極大点 r を消す。ホモトピー (β-トリック) を 2次元、3次元に拡張しただけである。とれ等の拡張もトリックと呼び、トリックを行なうたびに S^3 から M^3 への良い



早像の M^3 のある領域の点の幾何的早像度が減少する。図 3 を例にとると、極大点、極小点が折返し点で、 q と r を cancel すると Y 軸上の点 s の幾何的早像度が 5 から 3 に減ることになる。問題は有限回のトリックで折返しが無くなることを示すことにある。そのために S^3 の height function を使い、できるだけ折返し球、折返し分岐球を大ききくしておいて、その像の点の幾何的早像度を減らす。

予想 1 のために用意したトリック (直線早像のよい早像近似参照)

図 4 は折返し点の対 q, r (β-対と呼ぶ) は線 α と折返し曲面 F との交点で α 上には singularity は q, r のみであるときの像の図である。β-トリックを行うと F が単純



を受けて右の図のように F ($f(F)$ も同様), から二つの円板を除き, その境界に円柱の側面を貼りつけると折返し曲面像となり, 代わりに分岐曲線系(像)が生じる。像の円柱の内部の点の幾何学的写像度は 2 だけ減っている。このトリックはホモトピーである。

図5の α -トリックのみがホモトピーで実現できない。 S^3 が S_1^3, S_2^3 分離し, 各々から M^3 への良い写像が作られ, 少なくとも一方の写像度は 0 でない。図5も像の図

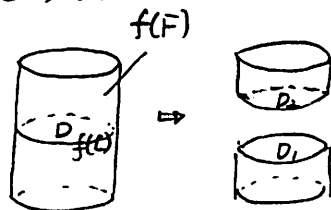


図5 α -トリック (ホモトピーでない)

であるが, 折返し曲面 F は S^3 内の S^2 と閉曲線 C で支えられ, S^2 上には \pm の singularity はそれ以外になく, S^2 上の C を境界とする二つの disk は f により M^3 の一つの disk D に重なって同様に写像されている。 α -トリックを行えば $f(F)$ の $f(C)$ の正則近傍が除かれて, 二つの disk D_1, D_2 が貼られる。 S^3 は S^2 の正則近傍を除くと, 3-球 B_1^3, B_2^3 となり各々の境界に B^3 を一つづつ貼って S_1^3, S_2^3 となる。

図6.1は連続写像を良い写像で近似するときを用いた δ' -トリックの応用で, 折返し曲面像の $f(F)$ の一部である

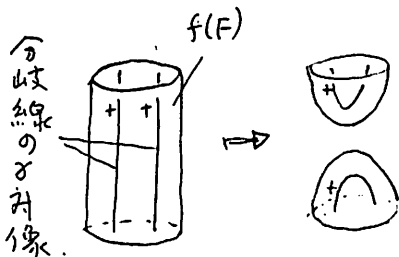


図6.1 δ -トリック

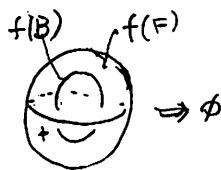


図6.2 δ' -トリック

円柱の側面と分岐線の δ -対称像が 図6.1 の右の図のように在り, 上下の半球面状の折返し曲面像の間の点における幾何学的写像度が 2 だけ減っている。 図6.2 は図6.1 より単純で, 球面状の折返し曲面像と円筒状の分岐曲線像が δ' -トリックで一度に消える。 分岐曲線はすべて正的にしてあるが, すべて負(-)でも良い。 球面状の折返し曲面像内の点の幾何学的写像度が 2 だけ減る。

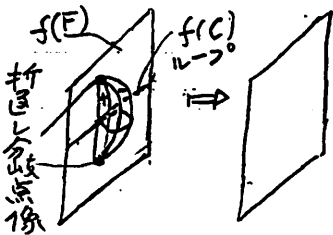


図7.1 δ-トリック

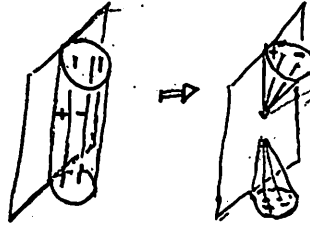


図7.2 δ-トリック

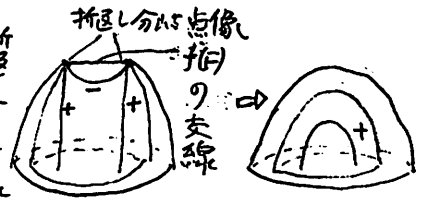


図7.3 δ-トリック

図7は連続写像を良い写像に近似するときのδ-トリックの応用である。そのときはループと±の分岐点像対が一度に消えてループの内部の点の幾何的写像度がまた1だけ減ったが、図7.1のなめくじ状の部分の、図7.2の新しく生じた折返し分岐点像の向の、図7.3の右の図の二つの半球面の間の幾何的写像度が2だけ減っている。図7.1, 図7.3で折返し分岐点像の対が消え、図7.2では生じている。図7.1, 図7.2では折返し曲面は変化してないが、図7.3では円柱の側面状の折返し曲面が二つの半球面状の折返し曲面となり、負の分岐線が一つ減っている。

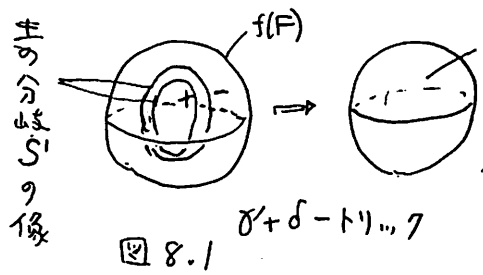


図8.1

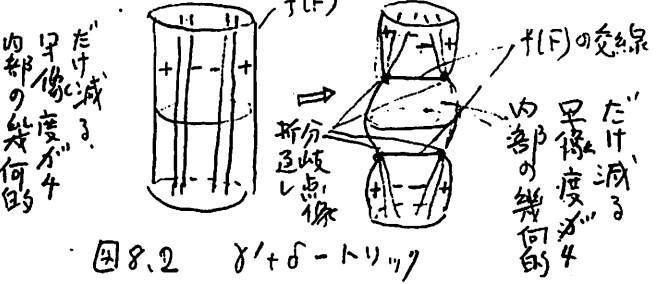


図8.2

図8はδ-トリックとδ'-トリックを合わせた操作である。図8.1は折返し2-球面像と±の分岐円筒像の対でトリックを行うと、折返し2-球面像の折返しの向きが内側から外側に逆転し、折返し2-球面像の内部の幾何的写像度は4だけ減り、分岐円筒は消える。図8.2は円柱の側面状の折返し曲面像とその内部を走る、±の分岐線像の対でトリックを行うと、四つの折返し分岐点像が生じ、その二つづつを結ぶ折返し曲線像の二つの交線が生じる。その交線を結ぶ折返し

(7)

7

曲面像の内部の幾何的平衡度は4だけ減った。

文献

3次元ホッホレ予想について, 本間龍雄, 数学, 第42巻,
1号, p.74 ~ p.80 (1990)