

写像度が0でない連続写像 $f: S^3 \rightarrow M^3$ について

本間 龍雄

次のような問題を考へてゐる。

問題 「有向閉3次元多様体 $M^3 \setminus S^3$ から、写像度が0でない連続写像 f があるとき、 M^3 は何物か？」

この問題の写像度1の場合が3次元ホップカレ予想である。 f は ε -homotopy で良い写像で近似できるのだから、 f を始めから良い写像としておく。定理1で f が折返しをもたないときは、局所同様な写像 g と普遍被覆 h に分解 $f = h \circ g$ できることを示し、定理2,3で写像度2ならば M^3 は S^3 または P^3 であることを示す。今後 f は写像度が0でなく、折返しをもたない良い写像とする。

定義 写像 $g: S^3 \rightarrow N^3$ があって、 $\forall p \in S^3$ に対し、 p の近傍 U と同相写像 $h: g(U) \rightarrow f(U)$ が存在し、 $f|_U = h \circ (g|_U)$ となるとき、 f と g は局所同等であるという。

定理1 単連結な閉3-多様体 \tilde{S}^3 、 f と局所同様な良い写像 $g: S^3 \rightarrow \tilde{S}^3$ と普遍被覆 $h: \tilde{S}^3 \rightarrow M^3$ が存在し、 $f = h \circ g$ を満たし、 f と g の分岐曲線は一致し、 f の写像度 = h の写像度 $\times g$ の写像度となる。

証明 M^3 の任意の点を z とする。 $f^{-1}(z)$ の ε -点 p, p' を結ぶ S^3 の道 A の像 $f(A)$ が可縮であるとき、 $p \sim p'$ と定義する。この定義は A の選び方によらないし、 \sim は同値律をみたすので、その同値類を \tilde{S}^3 の点とする。 $g(p) = p$ の属する同値類、 $h(p)$ の属する同値類) = z とすると、 $f = h \circ g$ で、 g, h は全射である。

f は分岐被覆であるから、 $f^{-1}(z)$ の ε -点を p とすると、 p と z の球近傍 U と V が存在し、 $f|_U = \nu$ 、 $f|_{\partial U} = \partial \nu$ をみたす。 p', p'' を U の ε -点とする。 $f(p) = f(p')$ であるとは、 p' と p'' を結ぶ U の道の f による像は V の可縮な閉じた道である。すなわち $g(p') = g(p'')$ 。 $f(p') \neq f(p'')$ であるとは、もちろん $g(p') \neq g(p'')$ 。従って $h|_{g(U)}: g(U) \rightarrow V$ は全単射であるので、 $g(U)$ が $g(p)$ の球近傍となるように \tilde{S}^3 の位相を入れる。 \tilde{S}^3 は閉3-

(2)

多様体, g は f と局所同値, h は被覆である。

\tilde{S}^3 が単連結であることを証明する。 $\lambda: [0, 1] \rightarrow \tilde{S}^3$ を閉じた道とする。
 $g: S^3 \rightarrow \tilde{S}^3$ は分岐被覆であるから, λ の持ち上げ $\mu: [0, 1] \rightarrow S^3$ が存在し,
 $g \circ \mu = \lambda$ となる。 M^3 の閉じた道 $h \circ \lambda = h \circ g \circ \mu = f \circ \mu$ は \tilde{S}^3 の閉じた道
 λ の像であるから, 可縮である。 h は被覆であるから, d 由此から M^3 への連続
写像 λ は \tilde{S}^3 への連続写像に持ち上げられる。 故に λ は可縮である。
証明終り。

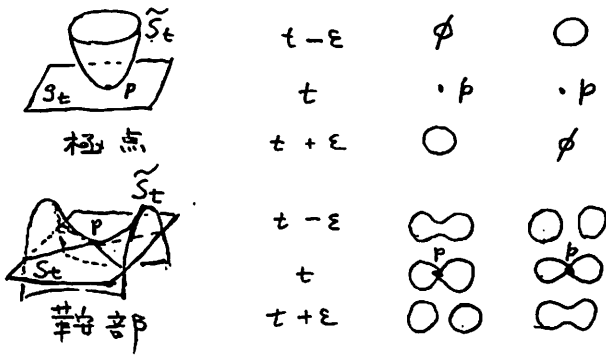
定理 2 $f: S^3 \rightarrow \tilde{S}^3$ が写像度 2 で, 分岐をもち, \tilde{S}^3 が単連結な
らば, \tilde{S}^3 は S^3 である。

証明 $g: S^3 \rightarrow S^3$ を次のように定義する。 p が分岐点であるときは,
 $g(p) = p$, p が分岐点でないときは $f(p') = f(p)$ ($p' \neq p$) をみた
す点 p' が一意的に定まるから, $g(p) = p'$, $g(p') = p$ と定める。
 g は分岐点を不動点とする自己同相写像で, $g^2 = \text{id}$. $f \circ g = f$
をみたす。 Smith の定理より分岐点集合は急峻目 K であり,
Smith の予想は解決しているから, K は自明であり, \tilde{S}^3 は S^3 である。
証明終り。

定理 3 $f: S^3 \rightarrow M^3$ が写像度 2 で, 分岐をもちたなければ, M^3
は射影空間 P^3 である。

証明 定理 2 の証明と同じく, $g: S^3 \rightarrow S^3$ が定まり, g は不
動点をもたない自己同相写像となり, $g^2 = \text{id}$, $f \circ g = f$ をみた
す。 $h: S^3 \rightarrow [0, 1]$ を S^3 の height function とし, $h^{-1}(0) = s$
 $h^{-1}(1) = n$ は共に一点, $0 < t < 1$ で $h^{-1}(t) = S_t$ は等高球面,
 $h^{-1}([0, t]) = B_t$, $h^{-1}([t, 1]) = B_t^c$ とする。 $g(s) = \tilde{s}$, $g(n) = \tilde{n}$,
 $g(S_t) = \tilde{S}_t$, $g(B_t) = \tilde{B}_t$, $g(B_t^c) = \tilde{B}_t^c$ と書く。 左のような
図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ B_t \cap \tilde{B}_t \end{array} & \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ B_t^c \cap \tilde{B}_t^c \end{array} & B_t \cap \tilde{B}_t^c \xrightarrow{g} B_t^c \cap \tilde{B}_t \end{array}$$



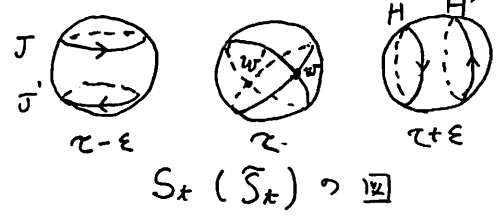
$t - \epsilon$ \emptyset \bigcirc $S_t \cap \tilde{S}_t$ が t と共にどのよ
うに変化するかを調べる。
 t $\cdot p$ $\cdot p$
 $t + \epsilon$ \bigcirc \emptyset
四のような 極点と鞍部を
臨界点とロキ、その時の
 t を臨界時という。極点
では S_t と \tilde{S}_t で innermost
な S' が生じたり消えたりする。
鞍部では、一つの臨界時で

を除外して、一つの S' が二つに分離したり、二つが一つになつたりする。

f (従つて g) を ϵ -isotopy で修正し、臨界時は $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$
で、各臨界時 t_i において、 $S_{t_i} \cap \tilde{S}_{t_i}$ は g で互いに写像される
一つの臨界点を含まぬものとする。臨界時以外では $S_t \cap \tilde{S}_t$ は有
限個の S' である。 $S_t(\tilde{S}_t)$, t を t_i に tree の構造を次のように入
れる。 $S_t - \tilde{S}_t$ ($\tilde{S}_t - S_t$) の連結成分を vertex, $S_t \cap \tilde{S}_t$ の連
結成分の S' を edge とする。 tree の端点は innermost な S'
に囲まれた $S_t - \tilde{S}_t$ ($\tilde{S}_t - S_t$) の連結成分である。証明の方
針は tree の端点と接続する edge を cancel して、tree
を簡単にするのである。

定理3の証明の中心部分は、次の条件 i), ii), iii), iii') をみたす
臨界時 τ と τ における鞍部の対 $w, w' = g(w)$ の存在を示すこと
である。

i) τ の直前 $\tau - \epsilon$ の $S_{\tau - \epsilon} \cap \tilde{S}_{\tau - \epsilon}$
の S' の対 $J, J' = g(J)$ が、鞍
部の対 $w, w' = g(w)$ にならな
い。



ii) $\tau + \epsilon$ で $H, H' = g(H)$ となる。

任意の t に対し、 $S_t \cap \tilde{S}_t$ の w, w' を含む連結成分を除いて、 $S_t \cap \tilde{S}_t$
の連結成分は対になつていて g により互いに写像される。

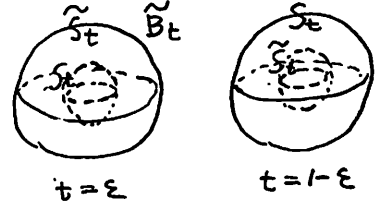
ii) 任意の t に対し、 $S^3 - S_t \cup \tilde{S}_t$ の連結成分は奇数個で
一つの連結成分 K_t のみ g により自分自身に写像され、 K_t 以外は
対になつていて互に写像される。

(4)

iii) $0 < t < \tau$ において, $K_t \subset B_t^c \cap \tilde{B}_t^c$ で, K_t は単調に縮小する。

iii') $\tau < t < 1$ において, $K_t \subset B_t \cap \tilde{B}_t$ で, K_t は単調に拡大する。

図は K_t の最初と最後を表わしている。
 半球面 S_t の内側が B_t で, 半球面 \tilde{S}_t の外側が \tilde{B}_t を表わす。
 $t = \varepsilon$ で $K_t = \text{int}(B_t^c \cap \tilde{B}_t^c)$,
 $t = 1 - \varepsilon$ で $K_t = \text{int}(B_t \cap \tilde{B}_t)$ である。



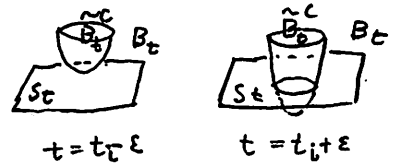
臨界時 t_1 と t_n は共に極点で, t_1 で S' が生じ, t_n で S' が消える。
 $t = t_1 + \varepsilon$, $t_n - \varepsilon$ でもそれぞれ $K_t = \text{int}(B_t^c \cap \tilde{B}_t^c)$,
 $K_t = \text{int}(B_t \cap \tilde{B}_t)$ である。ただし $t = t_1 + \varepsilon$ で solid torus $B_t \cup \tilde{B}_t$ は S^3 の中で



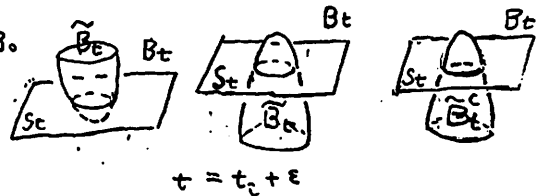
unknotted とは限らない。しかし, $0 < t < t_2$, $t_{n-1} < t < 1$ において, (性質 i), ii), iii), iii') はみたまわっている。

$0 < t < t_2$ において i), ii), iii) がみたまわられたものとする。

a) t_1 の臨界点前が極点で, $t_1 + \varepsilon$ に S' が生じる場合を考える。右のようなことはあり得る。なぜなら B_t は単調に拡大し, \tilde{B}_t^c は単調に縮小するからである。



右のような三つの場合は生じる。
 K_t が単調に縮小するという条件の外の i), ii), iii) の性質はみたまわる。しかし,



$B_t^c \cap \tilde{B}_t^c$ は単調に縮小するので, $K_t \subset B_t^c \cap \tilde{B}_t^c$ は単調に縮小する。

a') t_2 の臨界点前が極点で, $t = t_2 - \varepsilon$ の S' が消えるときは, a) と同じく三つの場合があり得るが, 消える $S^3 - S_t \cap \tilde{S}_t$ の連結成分はもちろん K_t でなく, $B_t^c \cap \tilde{B}_t^c$ は単調に縮小することより, $K_t \subset B_t^c \cap \tilde{B}_t^c$ も単調に縮小し, (性質 i), ii), iii) は $t = t_2 + \varepsilon$ でみたまわる。

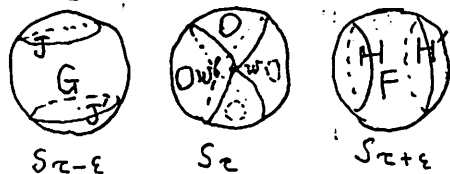
(4)

b) t_2 における臨界点対が鞍部 $v, v' = g(v)$ で、 $t = t_2 - \varepsilon$ における $S_t \cap \tilde{S}_t$ の二対の $S', \{J_1, J_1' = g(J_1)\}, \{J_2, J_2' = g(J_2)\}$ があつて、 t_2 において、 J_1 と J_2 が v で結びかれ、 J_1' と J_2' が v' で結びかれ、 $t_2 + \varepsilon$ において二対の $S', H, H' = g(H)$ となるときも三つの場合があるが、いずれの場合も $t_2 + \varepsilon$ において性質 i), ii), iii) がみたされる。

b') b) と逆の場合で、 $t_2 - \varepsilon$ における S' の対 $J, J' = g(J)$ が t_2 における鞍部 $v, v' = g(v)$ で二対の S' に分離され、 $\{H_1, H_1' = g(H_1)\}, \{H_2, H_2' = g(H_2)\}$ となるときも、 $t_2 + \varepsilon$ において性質 i), ii), iii) をみたす。

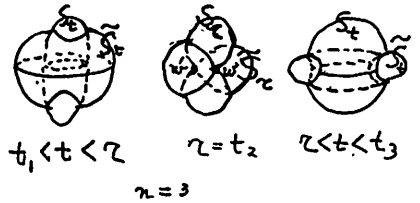
c) t_2 における臨界点対が鞍部 $v, v' = g(v)$ であり、 $t = t_2 - \varepsilon$ における $S_t \cap \tilde{S}_t$ の S' の対 $J, J' = g(J)$ が v, v' でつながつて、 $t_2 + \varepsilon$ における S' の対 $H, H' = g(H)$ となるときは $\tau = t_2, \tau = t_2 + \varepsilon$ において $w = v, w' = v'$ とおく。

$t = \tau - \varepsilon$ において $S_t - \tilde{S}_t, \tilde{S}_t - S_t$ の連結成分 G, \tilde{G} で $\partial G \supset J, J', \partial \tilde{G} \supset J, J', g(G) = \tilde{G}, g(\tilde{G}) = G$ となるものがあるから、 $g(K_t) = K_t$ より $\partial K_t \supset G, \tilde{G}$ をみたす。従つて $t = \tau + \varepsilon$ においては、 $S_t - \tilde{S}_t, \tilde{S}_t - S_t$ の連結成分 F, \tilde{F} が存在し、 $\partial F \supset H, H', \partial \tilde{F} \supset H, H', g(F) = \tilde{F}, g(\tilde{F}) = F$ をみたす。また $K_t = S^3 - S_t \cup \tilde{S}_t$ の連結成分 K_t で $g(K_t) = K_t$ をみたすものが存在する。



$K_{\tau-\varepsilon} \subset B_{\tau-\varepsilon}^c \cap \tilde{B}_{\tau-\varepsilon}^c$ であるから、 $K_{\tau+\varepsilon} \subset B_{\tau+\varepsilon} \cap \tilde{B}_{\tau+\varepsilon}$ である。 $t = \tau - \varepsilon$ において $K_t = \text{int}(B_t \cap \tilde{B}_t)$ であるから τ は必ずしも存在する。 $\tau - \varepsilon$ において性質 ii), ii), iii) がみたされるから、 $\tau + \varepsilon$ においては性質 i), ii), iii') がみたされる。 $\tau < t < 1$ においても $0 < t < \tau$ における証明と同じように証明が継ぎつされ、性質 i), ii), iii') が示される。

四は定理3の最終段階の図である。
 ここまで到達すれば、さらに f を isotopy で
 修正して、 $0 < t < \tau$ において $B_t \cap \tilde{B}_t = \emptyset$ 、
 $\tau < t < 1$ において $B_t^c \cap \tilde{B}_t^c = \emptyset$ 、 $S_\tau = \tilde{S}_\tau$
 をみたすようにできるので、 $M^3 = P^3$ は



明らかである。四の段階に至るためには、 S_t と \tilde{S}_t を innermost
 な $S_t \cap \tilde{S}_t$ の S' を見出してそれを消さねばならない。

臨界時 t_i の臨界点は極点で、 $S_{t_i - \epsilon} \cap \tilde{S}_{t_i - \epsilon}$ の S' が消え、
 そのような臨界時の中で最初とする。その S' を J とすると、 J は
 $S_{t_i - \epsilon}$ と $\tilde{S}_{t_i - \epsilon}$ で innermost である。 J が現われる臨界時
 を $t_k < t_i$ とする。 J は $t_k < t < t_i$ において innermost
 である。仮定より J の囲む disk に $S_t \cap \tilde{S}_t$ の S' が存在すると、
 t_i の前で消えることになり、 t_i が最初であることに矛盾す
 る。臨界時の順序を交換して $i = k+1$ にできる。 t_k と t_i ならば
 \Rightarrow の臨界時 t_k, t_i を cancel する。

$\tau = t_j = t_k$ ならば $j = k$ 、 $i = j+1$ となる。 t_i のつぎに極点にお
 いて S' が消える臨界時を t_l とし、その S' を L とする。 L のまじり臨
 界時を t_m とすると、 L は $t_m < t < t_l$ において、 S_t, \tilde{S}_t で inner
 most である。 S_t, \tilde{S}_t 内で L の張る disk を D_t, \tilde{D}_t とし、 $D_t \cup \tilde{D}_t$ を
 boundary とする $S^3 - S_t \cup \tilde{S}_t$ の連結成分(南球)は K_t と記する。
 故に臨界時 t_m と t_l を cancel できる。このようにして、 t_{j+1} 以外
 臨界時で S' の消える極点を cancel してしまうと、上の図のような n
 $= 3$ の場合となり、 M^3 は射影空間 P^3 である。定理3の証明終り。

参考文献

本向龍雄, ホアノカ予想について, 数学オ42巻オ1号(1990).
 P.A. Smith, Transformations of finite Period, II, Ann. Math. 40 (1939)
 J.W. Morgan and H. Bass, The Smith conjecture Academic Press
 (1984).