箱根セミナ記録 9 5 (1995) 1-7.

良い写像とハンドル分解

本間龍雄

序

M, Nが向きのついた閉3次元多様体であるとき，写像$f: M \to N$が良い写像であるとは，Mの各点pに対しpと$f(p)$の局所座標が存在し，$p = f(p) = (0, 0, 0)$で，次の4条件のうちのどれかが成立することである。

0) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$

1) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3)$

2) $f(x_1, z) = (x_1, z^2)$, $z = x_2 + ix_3$

3) $f(x_1, z) = (x_1^2, z^3)$ $z = x_2 + ix_3$

pが0), 1), 2), 3)の条件をみたすとき，それぞれfの正則点，折返し点，分岐点，折返し分岐点と呼び，正則点以外の点を特異点と呼ぶ。折返し点，分岐点，折返し分岐点の集合をそれぞれF, B, FBと書く。

$cl(F) = F \cup FB$, $cl(B) = B \cup FB$, FBはそれぞれ有限個の，閉曲面，閉曲線，点で，折返し曲面，分岐曲線，折返し分岐点と呼ぶ。折返し曲面と分岐曲線は折返し分岐点で横断的に交わる。

6月の神戸大の集中講義で，MからNへの任意の連続写像はε-ホモトピーにより良い写像に修正できることと，良い写像$f: M \to N$が与えられれば，Nのハンドル分解からMのハンドル分解を作れることを示した。本稿ではNの0-ハンドルからMの0-ハンドル，Nの1-ハンドルからMの0, 1-ハンドル，Nの2-ハンドルからMの0, 1, 2-ハンドル，Nの3-ハンドルからMの0, 1, 2, 3-ハンドルを構成する方法を示す。

Nのハンドル分解よりMのハンドル分解の構成

M, Nは向きのついた閉3-多様体，$f: M\to N$ は良い写像，Σ をNのハンドル分解とする。D^i, $i=0,1,2,3$, で i次元球を表わし，0はそれ等の重心を表わす。$D^i\times D^{3-i}$ は Σ の i-ハンドルで，$D^i\times\{0\}$, $\{0\}\times D^{3-i}$ を i-ハンドル $D^i\times D^{3-i}$ のそれぞれコア，ココアと呼ぶ。fのsingularityの像と各ハンドルのコアは横断的に交わり，ハンドルとの交わりは直積状になっているものとする。即ち

ハンドルとsingularityの像の交わり

＝コアとsingularityの像の交わり×ココア

である。i-ハンドル $D^i\times D^{3-i}$ の重心 $\{0\}\times\{0\}$ はsingularityの像に含まれないものとする。

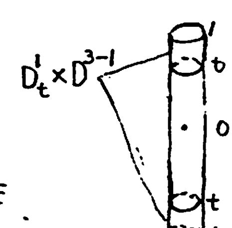
命題0　Nの0-ハンドルからMの0-ハンドルが生じる。

証明　Nの0-ハンドル $D^0\times D^{3-0}=\{0\}\times D^{3-0}$ はsingularityの像と交わらないとして良い。$f^{-1}(D^0\times D^{3-0})$ は重心 $\{0\}\times\{0\}$ の幾何的写像度の個数の3-球である。これ等はfにより同相に $D^0\times D^{3-0}$ に写像される。$f^{-1}(D^0\times D^{3-0})$ の各3-球をMの0-ハンドルとする。証終り

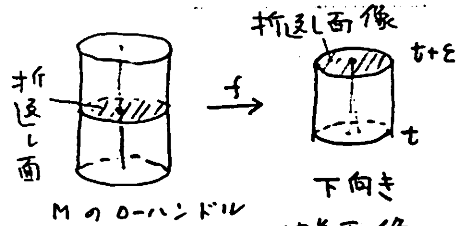
D^i, $i=1,2,3$, を0を中心とする半径1のi次元球として，0から D^i の各点pまでの距離tをheight function $t(p)$とする。D^iの高さがt以上の部分を D^i_t と書く。

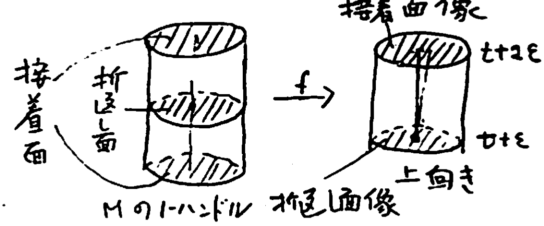
命題1　Nの1-ハンドルからMの0, 1-ハンドルが生じる。

証明　Nの1-ハンドル $D^1\times D^{3-1}$ とsingularityの像の交わりは有限個の折目曲面像のdiskだけである。tが1に十分近くて，$D^1_t\times D^{3-1}$ がsingularity像を含まないとき，$f^{-1}(D^1_t\times D^{3-1})$ を命題0で生じたMの有限個の0-ハンドルに加えても，同じ個数の3-球であるから，状況



1-ハンドル



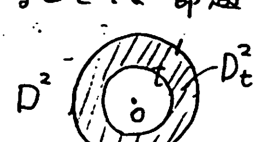


は変らない。
tが下向きの折返し面像(高さt+ε)を過ぎると，円柱状の3-球がMに生じるが，接着面がないのでMの0-ハンドルとなる。
tが上向きの折返し面像(高さt+ε)を過ぎたとする。$f^{-1}(D^{1}_{t+2\varepsilon}\times D^{3-1})$は既にハンドル分解に加えられているものとする。やはり円柱状の3-球が生じるが，t+2εのdiskの逆像(上底と下底)がハンドルの接着面となるので，Mの1-ハンドルである。
tが0に達すると，$\{0\}\times\{0\}$の幾何的写像度の個数の1-ハンドルが更に加わる。

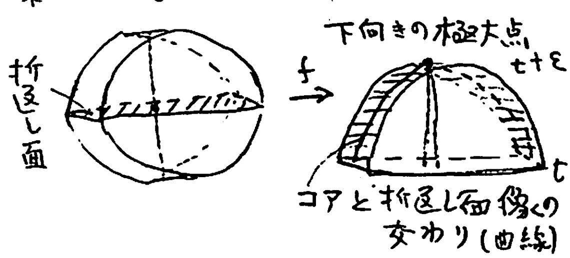
証明終

命題2　Nの2-ハンドルからMの0,1,2-ハンドルが生じる。

証明　2-ハンドルを$D^2\times D^{3-2}$とする。コア$D^2\times\{0\}$と折返し面像の交わりの曲線の極大点，極小点及び分岐曲線像の交点でMの0,1,2-ハンドルが生じ，最後に$\{0\}\times\{0\}$で2-ハンドルが生じることは命題1と同じである。またtが1に十分近いときは$f^{-1}(D^2_t\times D^{3-2})$を命題0,1で生じた部分に加えても状況が変らないことも同様である。



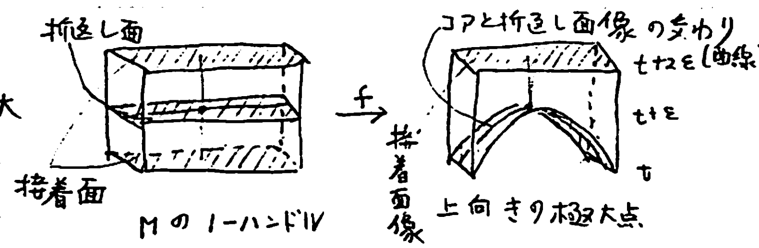
tがコアと下向きの折返し面像の交わりの極大点(高さはt+ε)を過ぎると，Mに円柱状の3-球が生じるが，接着面がないので，これはMの0-ハンドルとなる。



注意　折返し面はどの図でも水平に画いてある。

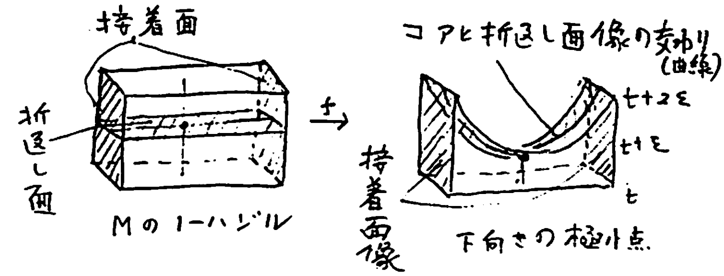
(4)

tがコアと上向きの折返し面像との交わりの極大点を過ぎると，図のような直方体状の3-球がMに加わったとして良いが，



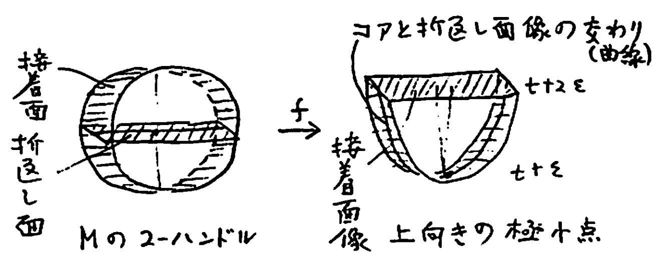
直方体の一組の対面が接着面となるので，Mの1-ハンドルである。

tがコアと下向きの折返し面像との交わりの極小点を過ぎると，直方体状の3-球がMに加わるとして良いが，直方体の

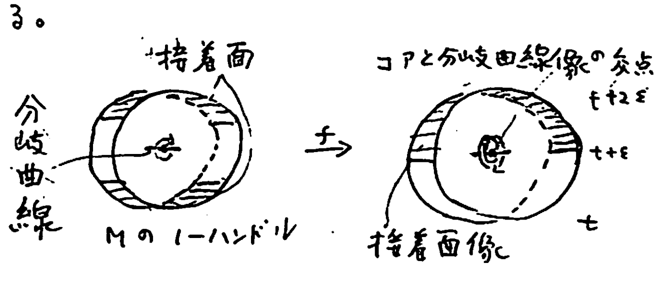


一組の対面が接着面となるので，Mの1-ハンドルである。

tがコアと上向きの折返し面像の交わりの極小点を過ぎると，円柱状の3-球がMに加わるとして良いが，接着面はアニュラスなので，Mの2-ハンドルである。



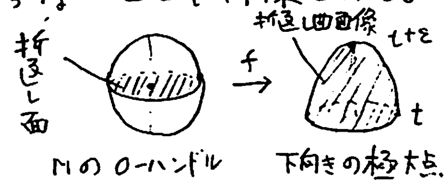
tがコアと分岐曲線の交点(高さはt+ε)を過ぎると，分岐曲線を軸とする円柱状の3-球がMに加わるとして良いが，接着面は側面の二つのdiskとなるので，Mの1-ハンドルである。



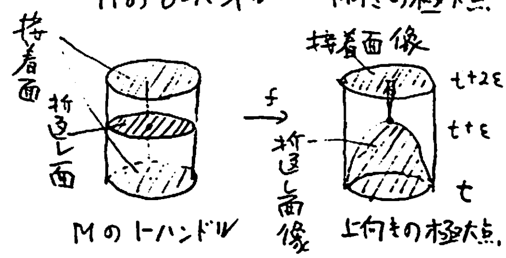
命題3　Nの3-ハンドルからMの0, 1, 2, 3-ハンドルが生じる

証明　Nの3-ハンドルを $D^3\times D^{3-3}$ とする。$D^{3-3}=\{0\}$ であるからコア $D^3\times\{0\}$ と3-ハンドル $D^3\times D^{3-3}$ は同じである。折返し曲面像の極大点，鞍部，極小点，分岐曲線像の極大点，極小点，折返し分岐点像でMの0, 1, 2, 3-ハンドルが生じる。$\{0\}\times\{0\}$ で幾何写像度の個数の3-ハンドルが生じることは命題1，2と同じである。またtが1に充分近いときは $f^{-1}(D^3_\varepsilon\times D^{3-3})$ を命題0, 1, 2で生じた部分に加えても状況が変らないことも同様である。

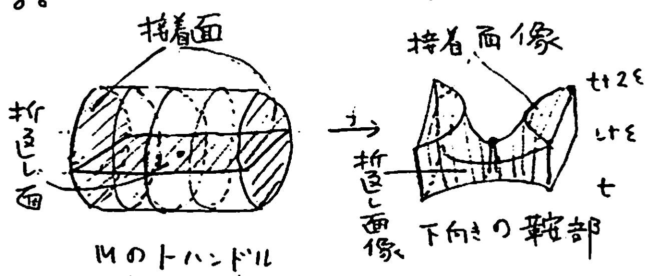
tが下向きの折返し曲面像の極大点を過ぎると，Mに3-球が生じるが，接着面がないのでMの0-ハンドルとなる。



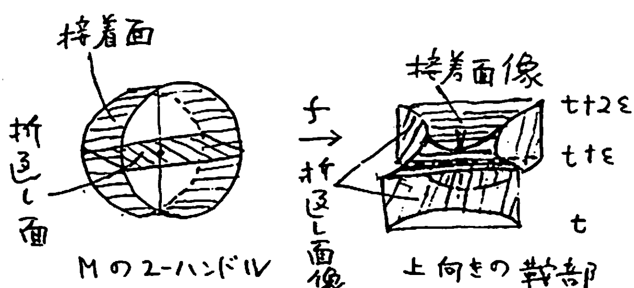
tが上向きの折返し曲面像の極大点を過ぎると，Mに円柱状の3-球が加わったとして良いが，接着面が二つのdiskなので，1-ハンドルである。



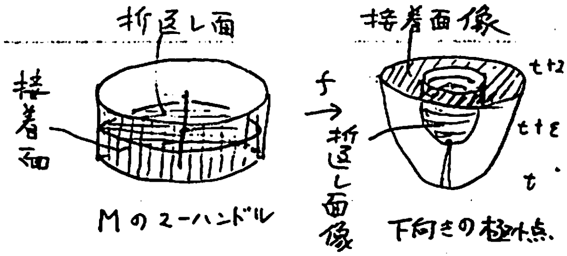
tが下向きの折返し曲面像の鞍部を過ぎると，図のような円柱がMに生じるとして良いが，接着面が二つのdiskなので，Mの1-ハンドルである。



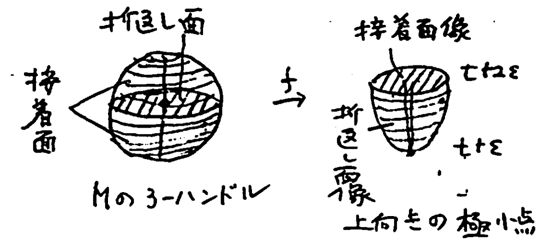
tが上向きの折返し曲面像の鞍部を過ぎると，図のような円柱がMに生じるとして良いが，接着面がアニュラスなので，Mの2-ハンドルである。



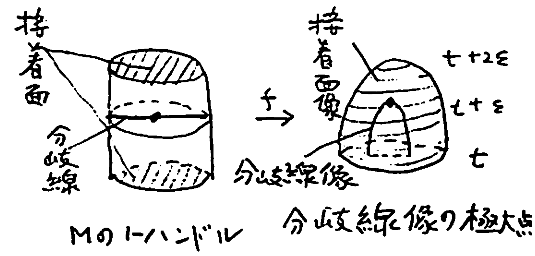
tが下向きの折返し面像の極小点を過ぎると，図のようにMに円柱状の3-球が生じるとして良い。接着面がアニュラスなので，Mの2-ハンドルである。



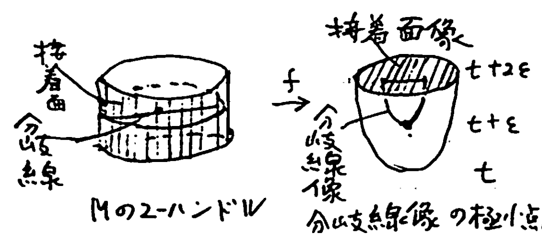
tが上向きの折返し面像の極小点を過ぎると，図のようにMに3-球が生じる。接着面が球面なので，Mの3-ハンドルである。



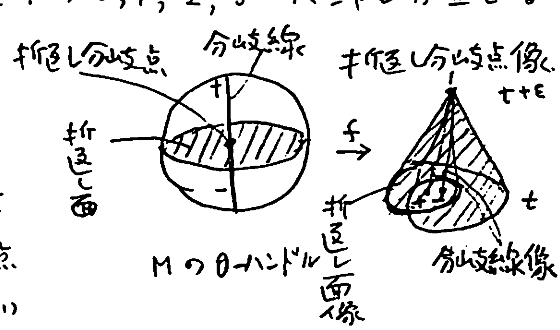
tが分岐線像の極大点を過ぎると，円柱状の3-球が生じる。接着面が2つのdiskなのでMの1-ハンドルである。



tが分岐線像の極小点を過ぎると，円柱状の3球が生じるとして良い。接着面がアニュラスなのでMの2-ハンドルである。

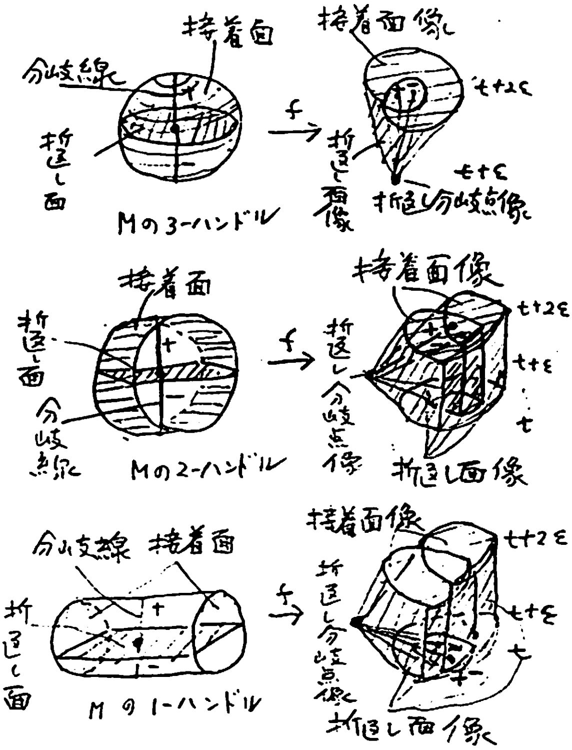


tが折返し分岐点像を過ぎるとMの0,1,2,3-ハンドルが生じることを確める。折返し分岐点像をε-ホモトピーでPL的に一般の位置にしておくと，折返し曲面像は錐状になり，折返し分岐点像はその頂点となる。図のように頂点が上にあるときは，Mに接着面のない3-球が生じるので，Mの0-ハンドルとなる。



tが図のように錐の下の頂点となっている折返し分岐点像を過ぎると，Mに接着面が球面の3-球が生じるのでMの3-ハンドルである。

tが図のように横向きの折返し分岐点像を過ぎると，分岐線像が上向きの場合は接着面がアニュラスの円柱が生じるとして良いので，Mに2-ハンドルが生じる。分岐線像が下向きの場合は接着面が二つのdiskの円柱が生じるとして良いので，Mに1-ハンドルが生じる。



命題3. 証明終り.

参考文献

数学 第42巻 第1号 P.74−80(1990) ポアンカレ予想について，本間龍雄