箱根セミナ記録 ９４(1994) 1-3.

３次元ポアンカレ予想について

本間龍雄

次の予想は３次元ポアンカレ予想と同等であることは良く知られている．この予想をもっと具体化し，S^3 の中のハンドル体とそこに張られたSeifert 膜系の修正問題としたのが予想２である．従来は与えられたSeifert 膜のgenus は任意であったが，予想２では１又は０となった．

予想１　$f: S^3 \to M^3$ がS^3 から向きの付いた閉３次元多様体M^3 への写像度１の連続写像であれば，M^3 はS^3 と同相である．

定理１と補題は同じ次元の多様体の間の連続写像をできるだけsingularity の単純な写像に直すことを目的にしている．([1])　その目的の為に良い写像とトーラス写像を定義した．

定義１．M，Nが閉n-多様体であるとき，$f: M \to N$が良い写像であるとは，Mの各点pに対しpと$f(p)$の局所座標が存在し，$p=(0, \cdots, 0), f(p)=(0, \cdots, 0)$ で，次の４条件のうちのどれかが成立することである．

0)　$f(x_1, \cdots, x_n)=(x_1, \cdots, x_n)$

1)　$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(x_1^2, x_2, \cdots, x_n)$

2)　$f(z, x_3, \cdots, x_n)=(z^2, x_3, \cdots, x_n)$,　$z=x_1+ix_2$

3)　$f(x_1, z, x_4, \cdots, x_n)=(x_1^2, z^2, x_4, \cdots, x_n)$,　$z=x_2+ix_3$

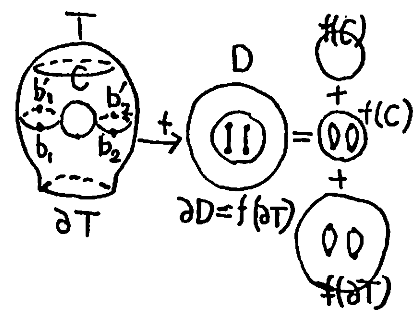
pが0), 1), 2), 3) の条件をみたすとき，それぞれfの正則点，折り返し点，分岐点，折り返し分岐点と呼び，正則点以外の点を特異点と呼ぶ．折り返し点，分岐点，折り返し分岐点の集合をそれぞれF，B，FBと書く．

$cl(F)=F\cup FB, cl(B)=B\cup FB, FB$ はそれぞれ $(n-1)$-, $(n-2)$-, $(n-3)$- 多様体で，Mにtameに埋め込まれていて，$cl(F)$ と$cl(B)$ はFBで横断的に交わる．

定義2　M, Nがコンパクトn-多様体であるとき, $f: M \to N$がproperで, fのダブルの写像が良い写像であれば, fを良い写像という.

定理1. n=1, 2, 3 で, M, Nは閉n-多様体, $f: M \to N$は任意の連続写像, εは任意の正数とすると, fとε-homotopicな良い写像が存在する.

定義3　Tは一つ穴のあいたトーラス, Dをdiskとする. 良い写像 $f: T \to D$が図のように1個の折り返し閉曲線Cと4個の分岐点 b_1, b_1', b_2, b_2' を持つとき, トーラス写像という. $f \times I: T \times I \to D \times I$もトーラス写像と呼ぶ.



補題　N^3, M^3 は向きの付いた閉3-多様体, $f: N^3 \to M^3$ が写像度1の連続写像であれば, M^3 のハンドル分解 $M^3 = D^3 \cup \underline{H}_1 \cdots \cup \underline{H}_m \cup \underline{J}_1 \cup \cdots \cup \underline{J}_m \cup \underline{B}^3$ と良い写像 $g: N^3 \to M^3$ が存在し,

1) gはfにhomotopic,

2) 任意の $1 \leq k \leq m$ に対し, $\underline{J}_k$ のcore $\underline{D}_k$ ($\underline{J}_k = \underline{D}_k \times I$) の内部に互いに交わらないdisk $\underline{D}_{k1}, \cdots, \underline{D}_{kl}$ ($l = l(k)$) が存在し, $L_k = cl(\underline{D}_k - \underline{D}_{k1} \cup \cdots \cup \underline{D}_{kl})$ とすると,

$$g \mid g^{-1}(D^3 \cup \underline{H}_1 \cup \cdots \cup \underline{H}_m \cup (L_1 \cup \cdots \cup L_m) \times I)$$

は同相写像である.

3) $g \mid g^{-1}(\underline{D}_{ki} \times I)$ はトーラス写像である. ($1 \leq k \leq m$, $0 \leq i \leq l(k)$)

補題より次の定理が直ちに証明される. D^3, gはそのまま, $n = l(1) + \cdots + l(m) + q$ (qは$l(k)=0$の整数kの個数) である.

<u>定理2</u>　N^3，M^3 とfは補題と同じとする．M^3 のハンドル分解$M^3=D^3 \cup H_1 \cup \cdots \cup H_n \cup J_1 \cup \cdots \cup J_n \cup B^3$ と良い写像$g: N^3 \to M^3$ が存在し，次の条件をみたす．

1）gはfにhomotopic である．

2）$g \mid g^{-1}(D^3 \cup H_1 \cup \cdots \cup H_n)$ は同相写像である．

3）$g \mid g^{-1}(J_i)$，$1 \leqq i \leqq n$，はトーラス写像又は同相写像である．

<u>予想2</u>　S^3 にgenus nのハンドル体Hと，各膜のgenus が0又は1のSeifert 膜系$\{F_1, \cdots, F_n\}$ が存在すれば，埋め込み $h: H \to S^3$ が存在し，$\{h(\partial F_1), \cdots, h(\partial F_n)\}$ を張るtrivial なSeifert 膜系がある．

<u>定理3</u>　予想2が正しければ，予想1従って3次元ポアンカレ予想が正しい．

<u>証明</u>　$f: S^3 \to M^3$ を写像度1の連続写像とすると，定理2よりM^3 のハンドル分解と良い写像$g: S^3 \to M^3$ が存在し，条件1），2），3）を満たす．$H=g^{-1}(D^3 \cup H_1 \cup \cdots \cup H_n)$，$F_i=g^{-1}(\mathrm{core}\, J_i)$ と置くと，予想2より埋め込み$h: H \to S^3$ と$h(\partial F_i)$ を張るdiskをD_i が存在する．$(i=1, \cdots, n)$　$hg^{-1}(D^3)$ を0－ハンドル，$hg^{-1}(H_j)$ を1－ハンドル，$D_i \times I$ を2－ハンドル$(i, j=1 \cdots n)$ とし，S^3 からそれ等を除いた集合の閉包(3-ball)を3－ハンドルとする．これ等はS^3 のハンドル分解となっていて，M^3 のハンドル分解と一致する．故にM^3 はS^3 と同相である．

文献

〔1〕本間龍雄，3－次元ポアンカレ予想について，数学，第42巻，第1号，p.74-80.（1990）