箱根セミナ記録 87 (1987) 51-65

Good な写像について

本間 龍雄
青山学院大学理工学部

PL 閉 n-多様体 M から PL 閉 n-多様体 N への good な写像を定義し，任意の連続写像 $f: M \to N$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，f と ε-homotopic な写像 $g: M \to N$ が存在することを予想している。この予想を G_n と呼ぶが，$n \leqq 3$ で G_n が成立することを証明する。

<u>定義</u>　M の点 p で $f: M \to N$ が <u>folding</u> とは，p と $f(p)$ 近傍の局所座標が存在し，

$$p = (0, 0, \cdots, 0), \quad f(p) = (0, 0, \cdots, 0)$$
$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (|x_1|, x_2, \cdots, x_n)$$

をみたすことである。$p, f(p)$ をそれぞれ <u>folding, fold pt.</u> という。

<u>定義</u>　M の点 p で $f: M \to N$ が <u>branching</u> とは，p と $f(p)$ の近傍の局所座標が存在し，p, $f(p)$ は共に原点で

$$f(r, \theta, x_3, \cdots, x_n) = (r, 2\theta, x_3, \cdots, x_n)$$

をみたすことである。(r, θ は極座標を表す) $p, f(p)$ をそれぞれ <u>branching, branch</u> point という。

<u>定義</u>　M の点 p で $f: M \to N$ が <u>fold-branching</u> とは，p と $f(p)$ の近傍の局所座標が存在し，p と $f(p)$ は原点で

$$f(x_1, r, \theta, x_4, \cdots, x_n) = (|x_1|, r, 2\theta, x_4, \cdots, x_n)$$

をみたすことである。

<u>定義</u>　写像 $g: M \to N$ が <u>M の点 p で good</u> とは，g は p で locally homeomorphic, folding, branching または fold-branching となることである。

<u>定義</u>　写像 $g: M \to N$ が <u>good</u> とは，M に埋め込まれた閉 $(n-1)$-多様体 F と閉 $(n-2)$-多様体 B が存在し，F と B は横断的に交わり，

i) $M-F\cup B$ の各点で g は loc. homeo.
ii) $F-B$ の各点で g は folding
iii) $B-F$ の各点で g は branching
iv) $F\cap B$ の各点で g は fold-branching

をみたすことである。F, B をそれぞれ <u>folding manifold</u>, <u>branching manifold</u> と呼ぶ

<u>予想 G_n</u>　M, N を任意の PL 閉 n-多様体，$f: M\to N$ を任意の連続写像，$\varepsilon>0$ を任意の実数とするとき，f と ε-homotopic な good な写像 $g: M\to N$ が存在するであろう。

<u>注意</u>　$\forall f: M\to N$, $\forall \varepsilon>0$ に対し，$\exists \delta>0$ で，f の δ-近似は f と ε-homotopic となるので，f の good な近似 g を作れば G_n は成立する。

<u>命題 1</u>　G_1 は成立する。

<u>証明</u>　$M=N=S^1$ であるが，$f: M\to N$ を非退化な単体写像 $g: M\to N$ で近似すれば，M のいくつかの頂点で g は folding，他の点では loc. homeo. となるので g は good である。 □

次の命題 2 は良く知られた結果であるが，その証明に用いられる手法を一般化してたびたび用いる。

<u>命題 2</u>　$L=\tilde{L}=S^1$ のとき，任意の $f: L\to\tilde{L}$ は定値写像または各点で loc. homeo. な写像 $h: L\to\tilde{L}$ と homotopic である。

<u>証明</u>　f を good な写像 g で近似し，また fold point どうしは一致しないようにする。L 上に次のような三点 p, q, p' が存在する。p と q は隣りの folding point，$g(p)=g(p')$，弧 pp' 上の folding point は p と q のみで

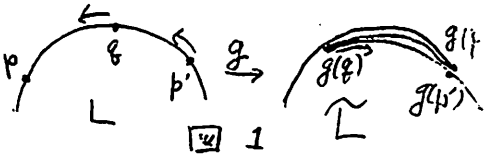


図 1

写像 g を homotopy で修正し q, p' を同時に p に近づけ，最後に p と q を cancel して一つの folding point を消し，他の folding point はそのままにしておく。同様な方法で folding point の pair を順に cancel して h を得る。 □

$f: M \to N$ を PL 閉 n-多様体 M から N への非退化な単体写像とする。A を M の i-単体，a をその重心とすると，$f(a)$ は $f(A)$ の重心である。$Lk(A, M)$，$Lk(f(A), N)$ をそれぞれ $a, f(a)$ を中心として同じ比で縮小したものをそれぞれ $L, \tilde{L}$ とすると，$f(L) \subset \tilde{L}$ で，$St(A) = a * L * \dot{A}$，$St(f(A)) = f(a) * \tilde{L} * f(\dot{A})$ はそれぞれ A と $f(A)$ の星状近傍となる。$St(A)$ の任意の点 p とその像 $f(p)$ は次式で表せる。

$$p = (1-s)((1-t)q + t\,a) + s\,b$$
$$f(p) = (1-s)((1-t)f(q) + t\,f(a)) + s\,f(b)$$
$$0 \leqq s, t \leqq 1, \quad q \in L, \quad b \in \dot{A} \qquad \cdots\cdots (1)$$

写像 $\alpha: a * L \to f(\alpha) * \tilde{L}$ が $\alpha | L = f | L$ をみたすとき，f を修正して $f_\alpha: M \to N$ を次のように作る。

i) $f_\alpha | Cl(M - St(A)) = f | Cl(M - St(A))$

ii) $p = (1-s)r + s\,b$，$f(p) = (1-s)\alpha(r) + s\,f(b)$

$r \in a * L$，$b \in \dot{A}$，$0 \leqq s \leqq 1$

さらに homotopy $\alpha: L \times I \to \tilde{L}$ があって，$\alpha_0 | L = f | L$ をみたすとき，f を修正して $f_\alpha: M \to N$ を次のように作る。

i) $f_\alpha | Cl(M - St(A)) = f | Cl(M - St(A))$

ii) $p = (1-s)((1-t)q + t\,a) + s\,b$

$f_\alpha(p) = (1-s)((1-t)\alpha(q, t) + t\,f(a)) + s\,f(b)$

$q \in L$，$0 \leqq s, t \leqq 1$

f から f_α を作ることを <u>conical construction</u> と呼ぶ

<u>定理1</u>　G_2が成立する。

<u>証明</u>　$f: M \to N$は非退化な単体写像として一般性を失わない。Mの2-単体の内点でfは loc. homeo.，1-単体の内点で loc. homeo. または folding であるから，Mの各頂点aの近傍で修正すればよい。$a, f(a)$の十分小さい星状近傍をそれぞれ $St(a) = a * L$，$St(f(a)) = f(a) * \tilde{L}$とすると，$f|L: L \to \tilde{L}$ は good である。命題2を用いる。

(i)　$f|L$が定値写像に homotopic ならば，その homotopy を $\alpha: L \times I \to \tilde{L}$ とし，$\alpha_0 = f|L$，$\alpha_1 = const.$ で

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = 1$$

において，fの folding point の pair $\{p_i, q_i\}$ $(1 \leqq i \leqq k)$ が cancel するものとする。即ち $q_i(t)$ $(0 \leqq t < t_i)$ は L上を p_iに単調に近づき，$q_i(t_i) = p_i$ で，$\{p_i, q_i(t)\}$ は α_tの folding point である。さらに $(1-t)p_i + ta$ と $(1-t)q_i(t) + ta$ は $0 \leqq t < t_i$ において f_αの folding point となり，cancel点

$$v_i = (1-t_i)p_i + t_i a = (1-t_i)q_i(t_i) + t a_i$$

において図2のようにf_αにより写像されが，f_αはv_iでは good でないので，v_iの星状近傍でf_αを図3のようにgに修正し，一つの folding arc と一つの branching point v_iに分割し（$\tilde{v}_i = g(v_i)$ は branch point）この近傍でも good となる，ただし，$a = v_k$ では f_αは初めから folding なので修正の必要はない。

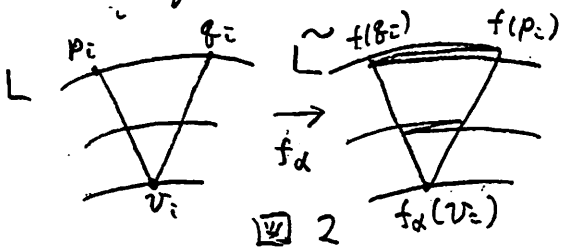


図 2

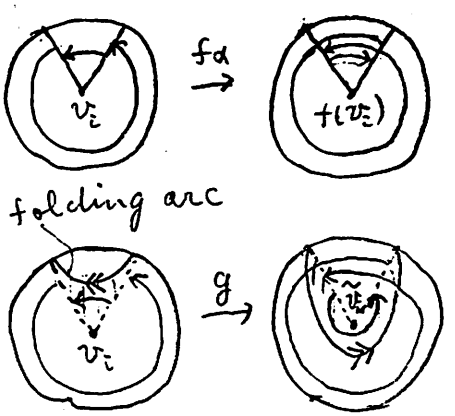


図 3

(ii)　$f|L$がn重の covering $(n > 0)$ と homotopic な場合は(i)と同様の方法で修正した写像を$\tilde{g}$とすると，$\tilde{g}$はa以外で

good, a で n 重の branching となる。($n \geq 0$)。 図4のように a を $n-1$ 個の branching point に分離できる。 □

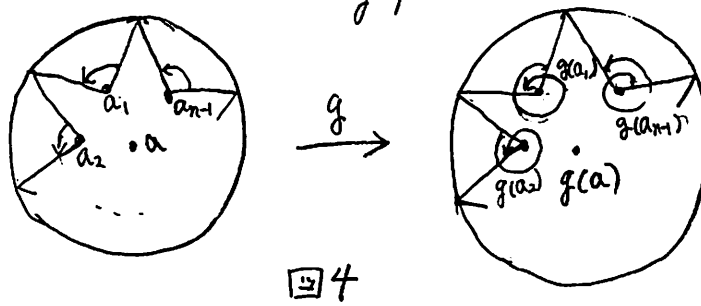


図4

G3が成立すること(定理2)の証明を準備する。定理1の証明と同じく $f: M \to N$ を PL 由 3-多様体 M から N への非退化な単体写像とする。f は M の 3-単体の内点で loc. homeo., 2-単体の内点で loc. homeo. または folding であるから, M の 1-skelton の近傍で f を修正すれば良い。A は M の 1-単体, $St(A) = a * L * \dot{A}$, $St(f(A)) = f(a) * \tilde{L} * f(\dot{A})$ を $A, f(A)$ に十分近い星状近傍で 3頁の (1) 式をみたすものとする。定理1の証明と同じく, $L = \tilde{L} = S^1$ であることと conical construction を用いて f を修正すると, $\dot{A}$ を除いて $St(A) = a * L * \dot{A}$ で good となる。この修正を各 1-単体で実施すると, 得られた写像 $\tilde{f}: M \to N$ は M の頂点を除いて good で, 頂点 a とその像 $\tilde{a} = \tilde{f}(a)$ の十分小さい星状近傍 $St(a) = a * L$, $St(\tilde{a}) = \tilde{a} * \tilde{L}$ ($L = \tilde{L} = S^2$) において,

(i) $\tilde{f}|L : L \to \tilde{L}$ は good,

(ii) $\tilde{f}|St(a) : St(a) \to St(\tilde{a})$ は conical である。

<u>定義</u> $L, \tilde{L}$ は共に S^2 で, $f: a * L \to \tilde{a} * \tilde{L}$ は $f(L) \subset \tilde{L}$ をみたす。$f|L$ の branching point の pair $\{b_1, b_2\}$ が次の条件をみたすとき <u>β-pair</u> と呼ぶ。

条件: b_1, b_2 を結ぶ L の二つの弧 A, A' と $\tilde{b_1} = f(b_1)$, $\tilde{b_2} = f(b_2)$ を結ぶ $\tilde{L}$ の弧 $\tilde{A}$ が存在し, $A \cap A' = \{b_1, b_2\}$, $f|A : A \to \tilde{A}$, $f|A' : A' \to \tilde{A}$ は共に homeomorphism, $A \cup A' - \{b_1, b_2\}$ で $f|L$ は loc. homeo. である。

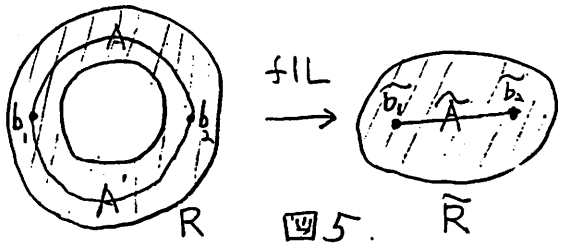


図5.

$\{b_1, b_2\}$ が β-pair であれば，$A \cup A'$, $\tilde{A}$ のそれぞれ L, $\tilde{L}$ における正則近傍 R, $\tilde{R}$ が存在し，$f|R : R \to \tilde{R}$ は $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ を branch point とする二重の branched covering となる。$a*(A \cup A')$, $\tilde{a}*\tilde{A}$ のそれぞれ $a*L$, $\tilde{a}*\tilde{L}$ における正則近傍 Q, $\tilde{Q}$ をとり，

$$R = Q \cap L \quad , \quad \tilde{R} = \tilde{Q} \cap \tilde{L}$$

となるようにする。$Cl(a*L - Q)$ は二つの球 B_1, B_2，$Cl(\tilde{a}*\tilde{L} - \tilde{Q})$ は一つの球 $\tilde{B}$ となる。$\alpha' : Q \to \tilde{Q}$ は b_1, b_2 を結ぶ弧 D を branching arc とする二重の branched covering で，

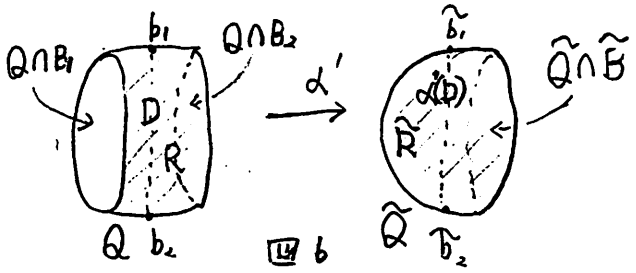


図6

$$\alpha'|R = f|R$$
$$\alpha'(Q \cap B_1) = \alpha'(Q \cap B_2) = \tilde{Q} \cap \tilde{B}$$

をみたすものとする。さらに B_1, B_2 に conical structure を与へ，α' を $\alpha : a*L \to \tilde{a}*\tilde{L}$ に拡張し，

$$\alpha|L = f|L$$

をみたすようにする。f から α を作ることを <u>β-construction</u> と呼ぶ。

球面の height function

$h : S^2 \to [-1, 1]$ が $h^{-1}(-1)$, $h^{-1}(1)$ は一点で，$h^{-1}(t)$, $-1<t<1$ が S^1 となるとき，h を <u>height function</u> と呼び，$h^{-1}(-1)$, $h^{-1}(1)$ $h^{-1}(t)$, $-1<t<1$, をそれぞれ <u>南極</u>，<u>北極</u>，<u>緯線</u> と呼ぶ。$L = \tilde{L} = S^2$ であり，$f : L \to \tilde{L}$ が good であれば，f の folding manifold F は L の有限個の閉曲線となるが，f を近似して $h \circ f|F$ は有限個の極大点と極小点をもつように，$\tilde{L}$ の南，北極は $f(F)$ 上にないようにできるので，今後 f はこれらの条件をみたすも

のと仮定する。従って $\tilde{L}$ の南，北極の f による原像は有限個の点となり，緯線の上に branch point がない場合は緯線の原像は有限個の閉曲線で，F と有限個の点で交れる。

branch point と置換

$L=\tilde{L}=S^2$ で，$f: L\to\tilde{L}$ が good ならば，f の branching manifold は有限個の点であるが，その像即ち branch point はすべて異なり，$\tilde{L}$ の南，北極とは重ならないものとして良い。b_1 を一つの branching point，$\tilde{b}_1=f(b_1)$ とすると，$\tilde{b}_1$ を通る緯線の原像は b_1 で交わり，その近くでは交わらない二つの弧なるが，$\tilde{b}_1$ の北と南では弧のつながり方が逆になるので，互換 $(i\,j)$ が起こるものと考える。

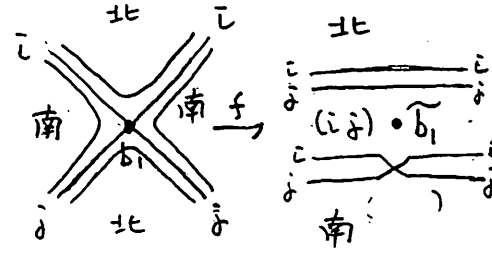


図 7

b_1 の隣りに b_2 があるとき，b_2 に対する互換を $(k\,l)$ とすると，互換の積である置換 $(i\,j)(k\,l)$ が起こると考えられる。図8は $j=k$ の場合であるが，この場合は置換

$$(i\,j)(k\,l)=\begin{pmatrix} i & j & l \\ l & i & j \end{pmatrix}$$

が起きたことになる。

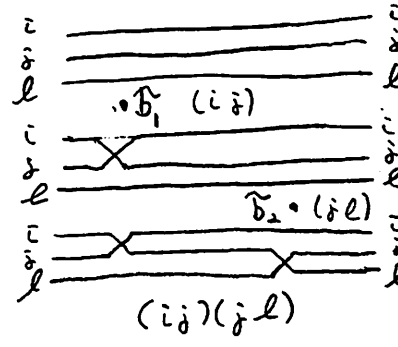


図 8

特に図9のように $i=k$，$j=l$ の場合は置換 $(i\,j)(i\,j)$ は恒等置換となるが，この場合 branching point の pair $\{b_1, b_2\}$ は β-pair となり，6頁の β-construction が可能となる。branch point $\tilde{b}_1$ $\tilde{b}_2$ を上下に動かしても変化しないが，$\tilde{b}_1$，$\tilde{b}_2$ を左右に動かすと互換は変わる。（図10参照）

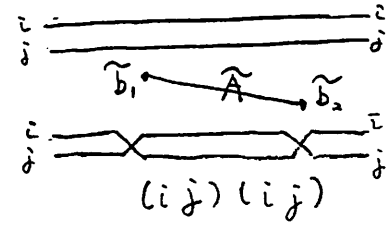


図 9

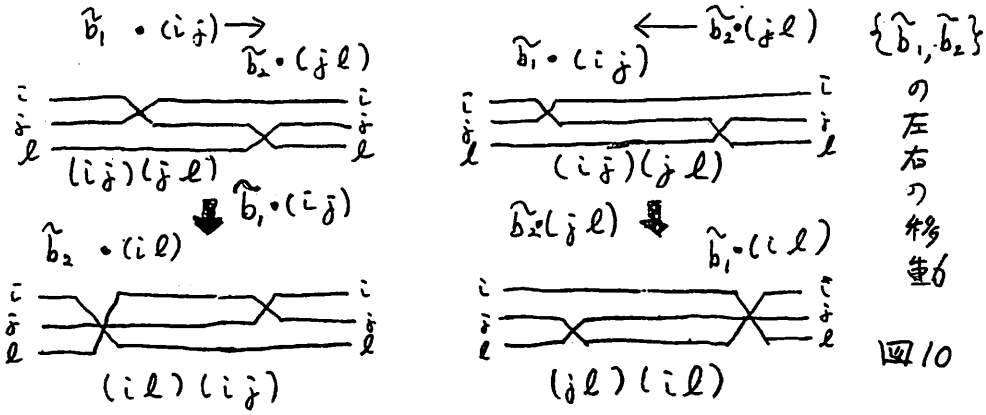


図10

即ち

$$(ij)(jl) = (il)(ij) = (jl)(il) = \begin{pmatrix} i & j & l \\ l & i & j \end{pmatrix}$$

が成立し，積の置換は変化しない。

このような branch point の移動は $\tilde{L}$ の ambient isotopy で実現でき，L の folding manifold，branching manifold はそのままにして f を homotopy で変化させることになり，その homotopy を $a * L$，$\tilde{a} * \tilde{L}$ の conical structure を用いて写像に実現すると，branching point，branch point の軌跡はそれぞれ branching arc，branch arc となる。

folding manifold の無い場合

$L = \tilde{L} = S^2$ で，good な写像 $f : L \to \tilde{L}$ が folding manifold を持たない場合は，f は branching point $b_1, b_2, \cdots, b_m$ を持つ branched covering となる。branched point $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \cdots, \tilde{b}_m$ は重ならないとして良い。f の写像度を $n > 0$ とする。

<u>命題3</u>　$m = 2(n-1)$ で，folding manifold を持たない good な写像 $g : a * L \to \tilde{a} * \tilde{L}$ が存在し，$g|L = f$，g の branching manifold は $b_1, b_2, \cdots, b_m$ を結ぶ $n-1$ 個の弧となる。

<u>証明</u>　$\tilde{L}$ の北極を囲む緯線の f による原像は n 個の閉曲線であるから，$b_1, b_2, \cdots, b_m$ は n 個の物の互換 $\alpha_1,$

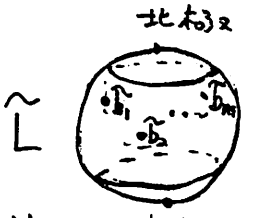


図11

$\alpha_2, \cdots \alpha_m$ で表わせる。南極を囲む線の原像も n 個の閉曲線であるから，これらの互換の積 $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_m$ は恒等置換である。$\alpha_1 = (i_1\, i_2)$ とすると，つぎのような互換の列 $\alpha_{j(1)}, \alpha_{j(2)}, \cdots, \alpha_{j(l)}$ $(j(1)=1<j(2)<\cdots<j(l)\leqq m)$ が存在し，

$$\alpha_{j(1)} = (i_1\, i_2),\ \alpha_{j(2)} = (i_2\, i_3),\ \cdots,\ \alpha_{j(l)} = (i_l\, i_1)$$
$$i_2, i_3, \cdots, i_l \neq i_1$$

branched point $\tilde{b}_m$ をつぎつぎと左(西)に動かしていくと，$(i_{l-1}\, i_l)(i_l\, i_1) = (i_{l-1}\, i_1)(i_{l-1}\, i_l)$，$(i_{l-2}\, i_{l-1})(i_{l-1}\, i_1) = (i_{l-2}\, i_1)(i_{l-2}\, i_{l-1})$，$\cdots$，$(i_2\, i_3)(i_3\, i_1) = (i_2\, i_1)(i_2\, i_3)$ となって，一番目と2番目の branched point に対応する互換は共に $(i_1\, i_2)$ となって，β-pair となる。この移動を f の homotopy と見て conical construction，さらに β-construction を実施すると これら二つの branched point を結ぶ branched arc を得る。同様の方法で順に β-pair を見出していくと，$L = \tilde{L} = S^2$ であるので，$n-1$ 個の β-pair 従って $n-1$ 個の branched arc を見出してこの construction は終了する。 □

γ-construction

G3を証明するためには，Mの頂点 a の近傍で写像を good に修正すれば良いが，$L = \tilde{L} = S^2$，$a * L$，$\tilde{a} * \tilde{L}$ は a と $\tilde{a} = f(a)$ の星状近傍で，$f : L \to \tilde{L}$ は good と仮定する。$\tilde{L}$ の線線 $C_t = h^{-1}(t)$，$-1<t<1$，の原像 $f^{-1}(C_t)$ は C_t が branch point，fold curve の極点を含まないとき有限個の閉曲線であり，t が変化しても C_t が branch pt. や fold curve の極点を通過しない間は，$f^{-1}(C_t)$ は L の上を ambient isotopy で移動する。線線 C_t が f の branch pt. や fold curve の極点を含まないとして，$f^{-1}(C_t)$ の一つの閉曲線 C がつぎのような folding point $\{p, q\}$ を含んだとする。

：C上にqを内点にもつ弧pp'が存在し，p, qを除いてpp'上でfはgoodで$f(p)=f(p')$である。命題2の証明を一般化して，C上でq, p'をpに近づけるhomotopyにより，folding point p, qを一致させ，さらに定理1の証明で用いた方法（図2，図3参照）により，図12のごとく，folding manifold Fを修正してF'とし，folding point p, qはcancelし新しくbranching point b_1, b_2がpの近傍に生じてgoodな写像$f': L \to \tilde{L}$を得る。fからf'に至るhomotopyなconical constructionを用いて，$a*L$，$\tilde{a}*\tilde{L}$の内部に実現する。図13のごとくLと同心球面L'の間の領域を$\tilde{L}$と同心球面$\tilde{L}'$の間の領域に移すgoodな写像αが構成され，αのfolding mfd. F_αは一つの葉部を持ち外は，L，$\tilde{L}$に垂直であり，$\alpha(F_\alpha)$も$\tilde{L}$，$\tilde{L}'$に関して同じである。さらにαのbranching mfd. Bは新しい弧$b_1'b_2'$を生じ，これはL，L'に垂直に走る。ただし弧$b_1'b_2'$はF_αの下にあり，その像$\alpha(b_1'b_2')$は$\alpha(F_\alpha)$の上にある。図13は$\tilde{a}*\tilde{L}$のみであるが，$a*L$の図もほぼ同じである。ただ弧$b_1'b_2'$と$\alpha(b_1'b_2')$のF_α，$\alpha(F_\alpha)$にみする上下関係（葉部にみする上下関係）が逆である。fからαを構成することを<u>γ-construction</u>，f, gを<u>γ-pair</u>と呼ぶ。

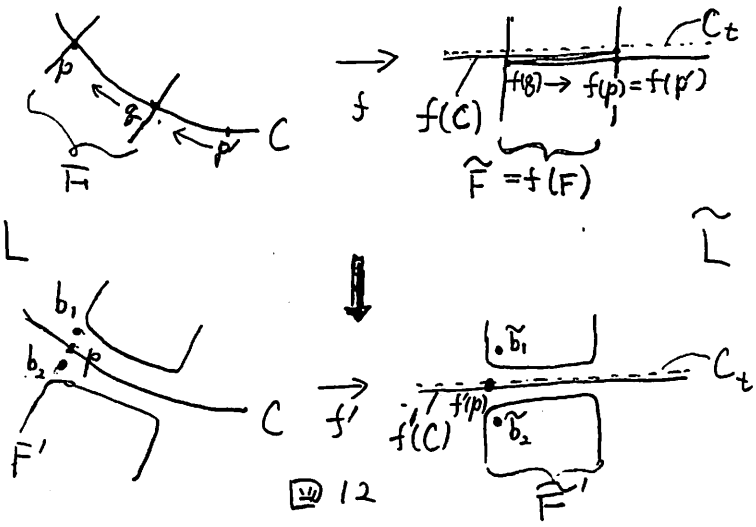


図12

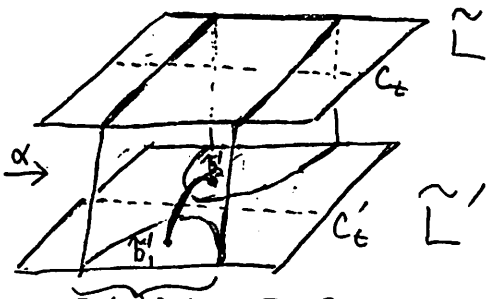


図13

γ'-construction

γ-construction の簡単な場合として，$\tilde{L}$ の緯線 C_t の原像 $f^{-1}(C_t)$ の一つの閉曲線 C を丁度二つの folding point $\{p, q\}$ を持つ場合は，p, q を cancel すると C は消えて，図14のような写像 f' を得る。この場合は branching point は生じない。β-construction と同じ方法で実現すると，$\tilde{L}$ と $\tilde{L}'$ の間の folding manifold に鞍部が一つ加えられるだけで，branching manifold は加らない。この構成を <u>γ'-construction</u>，$\{p, q\}$ を <u>γ'-pair</u> と呼ぶ。

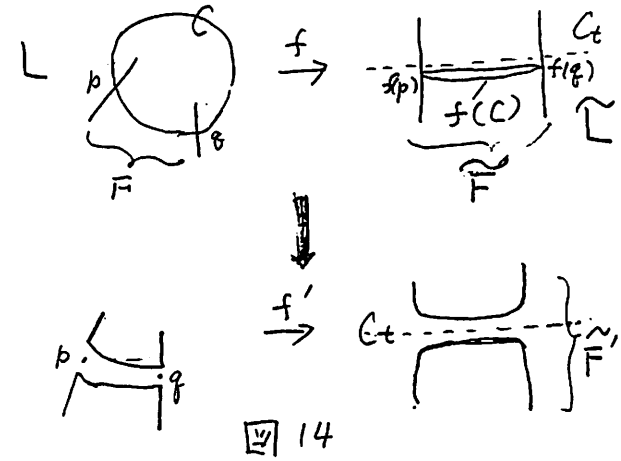
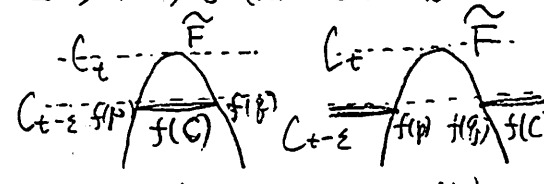


図14

<u>定理 2</u>　G_3 が成立する。

<u>証明</u>　証明の方針は北から南へ，$f: L \to \tilde{L}$ を修正して γ-pair を γ'-pair に変えていく。$\tilde{F}$ の極点を通らないすべての緯線上の任意の fold point が γ'-pair の片方となるなら（branch point はなくなっている）定理は容易に確められる。$\tilde{F}$ の極点の高さはそれぞれ異なっていて，$\tilde{F}$ は北極，南極は通らないものとする。北極の近くの緯線 C_t の原像 $f^{-1}(C_t)$ はいくつかの閉曲線で，F と交わらない。緯線 C_t が一番北の極大点を通れば，充分小さい $\varepsilon > 0$ に対し，$f^{-1}(C_{t-\varepsilon})$ 上に γ'-pair $\{p, q\}$ が存在する。このとき二つの場合 (a) と (b) に分かれる。

(a) $f^{-1}(C_{t-\varepsilon})$ の $\{p, q\}$ を含む閉曲線 C の像 $f(C)$ が極大点のすぐ下の弧となる。(b) $f(C)$ が極大点の下を通らない大きな



(i)　図15　(ii)

弧となる。(b)の場合は $\tilde{F}$ の $C_{t-\varepsilon}$ より上の弧を北極を通過するhomotopyで動かし図16のように，$f(C)$ の北を $f(C)$ にほぼ平行に走る弧に修正しておく。従って(a)の場合も(b)の場合も，$C_{t-\varepsilon}$ の上の $\tilde{F}$ は $f(C)$ に平行に走っている。これから $f(C)$ を <u>γ'-arc</u> と呼ぶことにする。

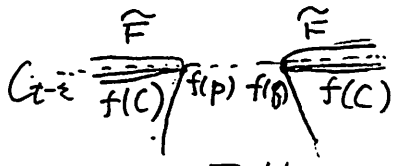


図16

北の緯度から順に数学的帰納法により，γ-pair を γ'-pair に修正していく。実数 $1>\lambda>-1$ が存在して，(i) λ より北の緯度には branch point は存在せず，(ii) λ より北の緯線 C_t が $\tilde{F}$ の極点を含まなければ，$f^{-1}(C_t)$ の各成分 C は folding point を含まない(a)，唯一つの γ'-pair を含む。従って $f(C)$ は γ'-arc となっている。(iii) folding manifold F の像 $\tilde{F}=f(F)$ の C_λ の北に入る弧はすべて一つの γ'-arc $f(C)$ に平行に走っている。緯線 C_t を C_λ から出発して南に動かしていくと，C_t が $\tilde{F}$ の極点，交点，branch point を通過するまでは，(i)，(ii)，(iii)の条件は満たされている。branch point は，C_t が $\tilde{F}$ の極点，交点に到達するまで南に下げていけるので，C_t が $\tilde{F}$ の極点，交点に達したときに f を修正する。

緯線 C_t を C_λ から南下させていき，初めて $\tilde{F}$ の極大点 x に達したとする。branch point は C_t より南に下げられる。図17の(a)のように γ'-arc の二つの枝が極大点でつなぎ方が変化する場合，あるいは最北の極大点と同じ場合は (i)，(ii)，(iii) の条件はそのままみたされる。図17の(b)のように，異なる γ'-arc の枝どうしのつなぎ方が変化する場合あるいは，一つの γ'-arc の枝と fold point をもたない $f(C)$ とのつなぎ方が極大点で変化する場合は，$C_{t-\varepsilon}$ で二組の γ-pair が生じる。

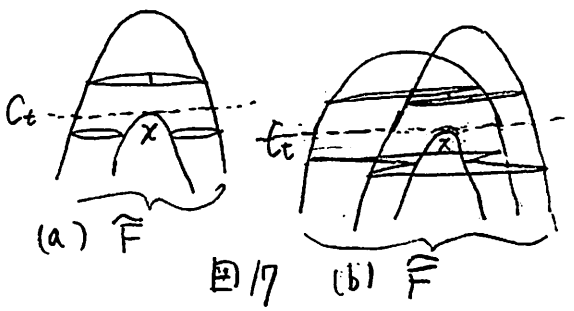


図17

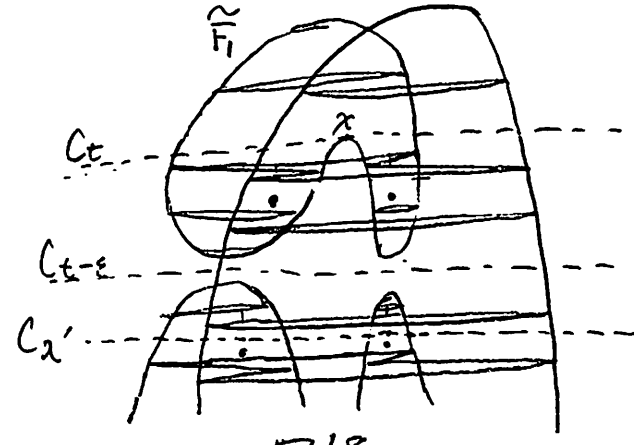
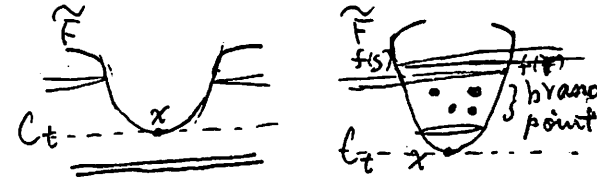


図18

$C_{t-\varepsilon}$ において二つの γ-construction を行うと四つの branch point が生じ, branching manifold の中に一つの曲線 F_1 が分離され, $\tilde{F}_1$ にの極大点 x を南に下して一つの極小点と cancel すると, 一組の β-pair が生じ, β-construction により, これも cancel でき, $\tilde{F}_1$ は γ'-arc で張られる。残りの二つの branch point の近くの北を通る緯線を $C_{\lambda'}$ とすると, $C_{\lambda'}$ は (i), (ii), (iii) の条件をみたす。

緯線 C_t を C_λ から南下させていき, 初めて $\tilde{F}$ の極小点 x に達したとする。図19の (a) のような場合は問題ないので, 図19 (b) のような場合を考えれば良い。



(a) 図19 (b)

$\{s, s'\}$, $\{r, r'\}$ は γ'-pair でその像は緯線 $C_{t+\varepsilon}$ にのっていて, $\tilde{F}$ で $f(s)$, $f(r)$ の間に x があって, $C_{t+\varepsilon}$ の北では (i), (ii), (iii) はみたされているものとする。$C_{t+\varepsilon}$ の γ'-arc $f(s)f(s')$ と $f(r)f(r')$ の一つづつの枝のつなぎ方を変える branch point のみ考えれば良い, なぜなら, それ以外の branch point は $\tilde{F}$ の弧 $f(s)f(r)$ の外 従って C_t の南に下ろせる。branch point の中で β-pair にみするものどうしは β-construction で cancel すると, 異なる sheet の上にのっている二つの branch point $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ が残るが, $\tilde{F}$ の二点を結ぶ γ'-arc が図21 (a) の

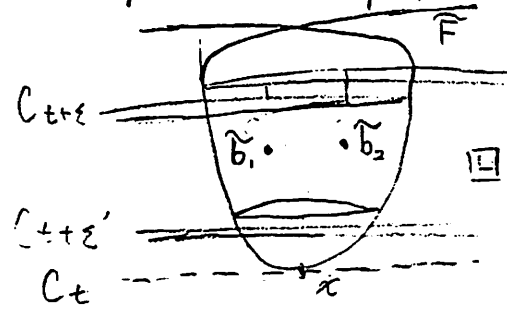
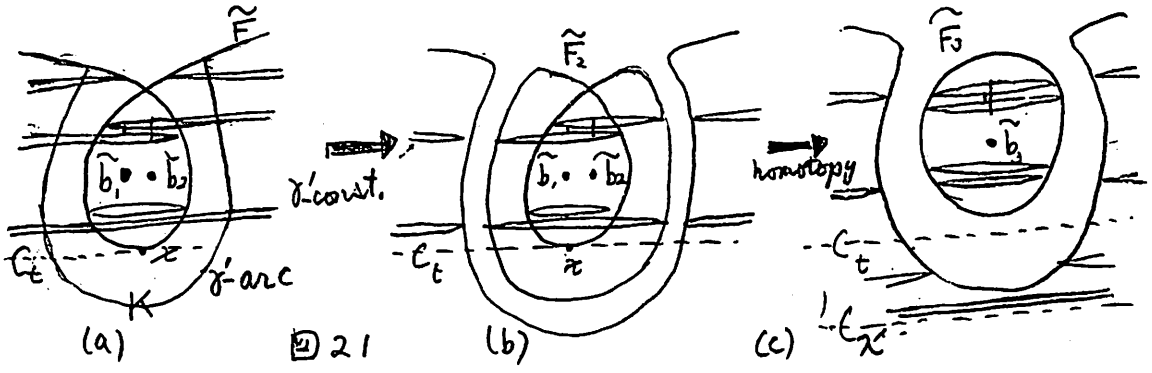


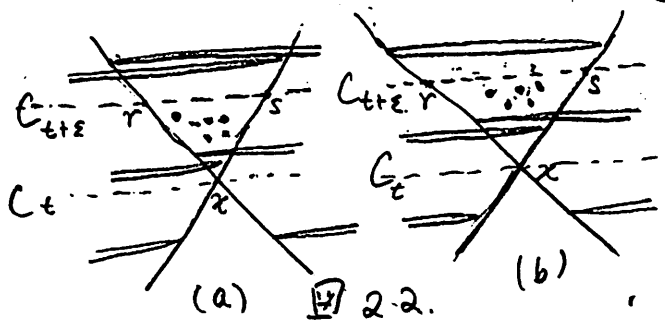
図20



(a) 図21 (b) (c)

ようにとれるから，ここで γ' construction を行うと，一つの fold curve $\tilde{F}_2$ が分離する。homotopy により $\tilde{F}_2$ を一つの周曲線 $\tilde{F}_3$ の2重の covering，$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ を一致させて，図21(c)のようにする。さらに $\tilde{F}_3$ を一点に contract し，これを conical-construction で $a*L$，$\tilde{a}*\tilde{L}$ 内に実現すると，$\tilde{F}_3$ が contract した一点で，fold-branch point が生じ，$C_{x'}$，$t>x'$，より北で (i), (ii), (iii) をみたす。

緯線 C_t を C_λ から南下させていき，初めて $\tilde{F}$ の交点 x に達したとする。図22のように緯線 $C_{t+\varepsilon}$ の北では (i), (ii), (iii) がみたされていて，$C_{t+\varepsilon}$ と $\tilde{F}$ の交点を r, s とすると，三角形 rxs の中にいくつかの branch point がある。図22の(a)の場合は branch point を cancel するか Δrxs の外に動かせるので問題に生じない。図22の(b)の場合は上述の極小点の場合と同じように，二つの branch point を残して，他は cancel できるか Δrxs の外に動かせる。$\tilde{F}$ を結ぶ γ'-arc K が存在し上述の極小点の場合と全く同じく，conical construction により



(a) 図22. (b)

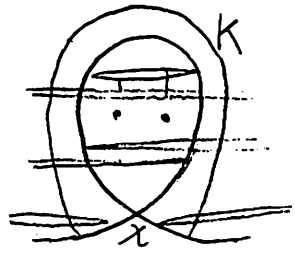


図23

一つの fold-branch point が生じて，mathematical induction が進行する。mathematical induction が南極に達すると，branch point はすべて消え，$\tilde{F}$ はの各成分は極大点と極小点を一つづつもち，γ'-arc で張られているので，F の各成分に fold disk を張って定理2の証明は終了する。 □

G_4 を現在研究中である。